XXXVIII OPM - Final - 12.09.2019 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Analisem-se as sequências obtidas nos primeiros movimentos realizados

ABCDE $\longrightarrow$ CABDE $\longrightarrow$ CAEBD $\longrightarrow$ ECABD $\longrightarrow$ ECDAB $\longrightarrow$ DECAB $\longrightarrow$ DEBCA $\longrightarrow$ BDECA $\longrightarrow$ BDAEC $\longrightarrow$ ABDEC $\longrightarrow$ ABCDE

Ao fim de 10 movimentos, repete-se a sequência inicial. Como $2020 = 10 \times 202$, a carta que ficou no início após 2020 movimentos foi a carta com a letra A.

Opção correta: E)

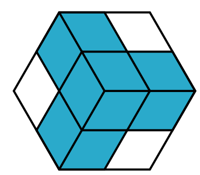
(b) O número não pode ter apenas um algarismo. Com dois algarismos, eles têm de ser $2, 6$ ou $3, 4$. Há quatro números com dois algarismos que verificam o pretendido ($26, 62, 34, 43$). Com três algarismos, estes têm de ser $1, 2, 6$ ou $1, 3, 4$ ou $2, 2, 3$. Nos dois primeiros casos há $3 \times 2 = 6$ números (três possibilidades para a escolha do primeiro algarismo e duas possibilidades para a escolha do segundo) e no terceiro caso apenas três números (escolher a posição do número 3). Portanto, com três algarismos há 15 números que verificam o pretendido.

Com quatro algarismos, estes têm de ser $1, 1, 2, 6$ ou $1, 1, 3, 4$ ou $1, 2, 2, 3$. Em todos estes casos o primeiro algarismo tem de ser 1, caso contrário o número seria maior que 2020. Nos dois primeiros casos, temos três possibilidades para o segundo algarismo e duas para o terceiro, logo há 6 números possíveis em cada. Com os algarismos $1, 2, 2, 3$, o primeiro será 1, e depois há três possibilidades para colocar o 3 (os restantes algarismos são 2). Portanto, com quatro algarismos há $6 + 6 + 3 = 15$ possibilidades.

No total há $15 + 15 + 4 = 34$ números que verificam o pretendido.

Opção correta: B)

(c) Dividindo o hexágono em losangos, do modo indicado na figura, a área de cada losango mede $\frac{36}{12} = 3$ cm^2. O polígono azul ocupa 9 losangos, logo a sua área mede $9 \times 3 = 27$ cm^2.



Opção correta: A)

(d) O elevador ainda poderia levar 60 caixas pequenas, ou seja a parte do elevador vazia é representada pela fração $\frac{60}{102}$. Sendo assim, queremos que esta parte seja ocupada por caixas grandes. Se x for o número de caixas grandes, a parte do elevador ocupada por x caixas grandes é $\frac{x}{68}$. Igualando estas duas expressões, tem-se

$$\frac{x}{68} = \frac{60}{102} \Longleftrightarrow x = \frac{60 \times 68}{102} \Longleftrightarrow x = 40$$

O Diogo ainda pode colocar 40 caixas grandes.

Opção correta: C)

2. Sendo O o centro da semicircunferência, observa-se que $[OD]$ e $[OA]$ são raios da mesma semicircunferência e por isso o triângulo $[AOD]$ é isósceles. Assim, $O\widehat{A}D = A\widehat{D}O = \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ e, portanto,

$$B\widehat{C}A = 180^\circ - (50^\circ + 75^\circ) = 55^\circ.$$

3. Se às quartas-feiras o Bruno dissesse a verdade, então às terças-feiras mentiria. Como o Bruno mente em dois dias consecutivos, então às segundas-feiras também mentiria.

   Como em nenhum dia há dois amigos a mentir, então, às terças-feiras, o Álvaro diria a verdade. Logo, às segundas-feiras, o Álvaro mentiria. Portanto, às segundas-feiras haveria dois amigos a mentir, o que sabemos que não acontece.

   Assim, concluímos que o Bruno mente às quartas e quintas-feiras. Se às terças-feiras o Álvaro mentisse, então às segundas-feiras diria a verdade. Como o Álvaro mente em dois dias consecutivos, então às quartas-feiras também mentiria. Portanto, às quartas-feiras haveria dois amigos a mentir, o que sabemos que não acontece.

   Assim, concluímos que o Álvaro mente aos domingos e às segundas-feiras. Finalmente, como o César mente em dois dias seguidos, que são diferentes dos dias em que o Álvaro e o Bruno mentem, concluímos que o César mente às sextas-feiras e aos sábados.

   Portanto, todos os amigos dizem a verdade às terças-feiras.

4. A Joana tem $2h30m = 2,5$ horas para carregar totalmente a bateria do telemóvel.

   Se não utilizasse o telemóvel, a bateria ficaria completamente carregada em 2 horas e, ao fim de uma hora, teria apenas metade (50%) da bateria carregada. Por isso, ao fim de x horas ($x \leq 2$) de carregamento sem utilização, a Joana teria $x.50\%$ de bateria carregada.

   Por outro lado, se carregasse e utilizasse em simultâneo o telemóvel durante 2 horas, então ficaria apenas com 60% da bateria carregada. Se carregasse e utilizasse em simultâneo o telemóvel durante uma hora, apenas ficaria com 30% da bateria carregada. Por isso, ao fim de x horas de carregamento e utilização simultâneos, o telemóvel ficaria com $x.30\%$ de bateria carregada.

   Assim, se a Joana quer a bateria completamente carregada ao fim de $2h30m$ utilizando o telemóvel durante x horas (e, portanto, não utilizando durante $2,5 - x$ horas), então

$$0,3.x + 0,5(2,5 - x) = 1 \quad (ou \quad 30\%x + 50\%(2,5 - x) = 100\%)$$

   ou seja, $0,2 \times x = 0,25$, logo $x = 1,25$ horas $= 75$ mins.

   Assim, a Joana pode utilizar o telemóvel durante 75 mins.