Duração: 4 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Comecemos por observar que todos os números da forma $a^2 - 1$ são BONS, uma vez que a permutação. $(a^2-1, a^2-2, \cdots, 2, 1)$ está nas condições do enunciado do problema. Portanto os números 3 e 8 são números BONS.

   De modo semelhante conseguimos concluir que se um número $t < \frac{a^2}{2}$ é BOM, então o número $a^2 - (t+1)$ também é um número BOM. Seja $(a_1, \cdots, a_t)$ uma permutação dos números de 1 a t que faz com que t seja um número BOM, ou seja $k + a_k$ é um quadrado perfeito. Isto significa que a permutação $(a_1, \cdots, a_t, a^2 - (t+1), a^2-(t+2), \cdots, t+1)$ também verifica a condição do enunciado, e por isso $a^2-(t+1)$ é um número BOM. Usando este resultado, concluímos que $5 = 9-3-1$, $12 = 16-3-1$ e $10 = 16-5-1$ são números BONS.

   Não é difícil verificar que 1 e 2 não são números BONS. Não existe nenhum número a_4 menor ou igual do que 4 tal que $4 + a_4$ seja um quadrado perfeito, portanto 4 também não é um número BOM.

   Se 6 fosse um número BOM, existiria um permutação $(a_1, a_2, \cdots, a_6)$ tal que $1 + a_1$ e $6 + a_6$ seriam quadrados perfeitos. Neste caso a única escolha possível, tanto para a_1 como para a_6, seria o número 3, e portanto 6 não é um número BOM. De igual modo se conclui que 7 não é um número BOM. Um raciocínio idêntico permite verificar que o único número entre 1 e 11 que somado com o número 11 dá um quadrado perfeito é o 5, que também é o único número entre 1 e 11 que somado com 4 dá um quadrado perfeito.

   Falta apenas verificar se 9 é um número BOM. A permutação $(8,2,6,5,4,3,9,1,7)$ faz com que 9 seja um número BOM.

2. Seja E uma ponto do lado $[AB]$ tal que $E\hat{D}B = B\hat{D}C$. Os triângulos $[BDC]$ e $[BDE]$ são congruentes, através da relação ala, uma vez que $A\hat{B}D = D\hat{B}C$. Podemos então concluir que $\overline{EB} = \overline{BC}$, $\overline{ED} = \overline{DC} = 3$, e que

   $$B\hat{E}D = B\hat{C}D = 2\,E\hat{A}D\,. \tag{1}$$

   Por um lado sabemos que $D\hat{E}A + A\hat{D}E + E\hat{A}D = 180^o$, uma vez que é a soma dos ângulos internos do triângulo, e por outro lado também sabemos que $D\hat{E}A = B\hat{E}D = 180^o$, donde se conclui que

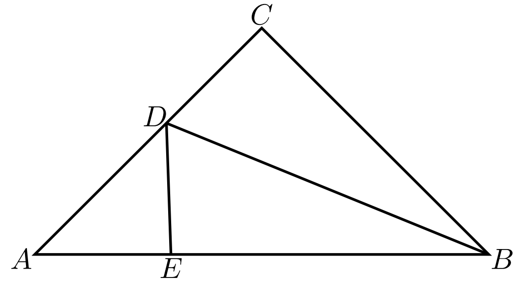
   $$B\hat{E}D = A\hat{D}E + E\hat{A}D\,. \tag{2}$$

   De 1 e de 2, vem que $2E\hat{A}D = A\hat{D}E + E\hat{A}D \Leftrightarrow E\hat{A}D = A\hat{D}E$, e portanto o triângulo $[AED]$ é isósceles com $\overline{DE} = \overline{AE}$.

   Finalmente

   $$10 = \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{DE} + \overline{BC} = \overline{DC} + \overline{BC} = 3 + \overline{BC},$$

   implica que $\overline{BC} = 7$.



3. A soma alternada do conjunto vazio é igual a 0. Seja n um inteiro maior do que 1. Existem 2^{n-1} subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com um número ímpar de elementos. Denotemos o conjunto de todos estes subconjuntos por I. O conjunto I pode ser dividido em quatro subconjuntos $I = I_1 \cup I_n \cup I_{1n} \cup I'$, onde I_1 é constituído pelos subconjuntos de I que contêm o número 1 e não contêm o número n, I_n é constituído pelos subconjuntos de I que contêm o número n e não contêm o número 1, I_{1n} é constituído pelos subconjuntos de I que contêm os números 1 e n, e I' é constituído pelos subconjuntos de I que não contêm os números 1 e n. Podemos estabelecer uma correspondência bijetiva entre I' e I_{1n}, pondo

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \leftrightarrow \{1, a_1, a_2, \ldots, a_k, n\}.$$

Além disso, assumindo que $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, a soma das somas alternadas para cada um destes pares é

$$(n - a_k + a_{k-1} - \cdots + a_2 - a_1 + 1) + (a_k - a_{k-1} + \cdots - a_2 + a_1) = n + 1.$$

Como I' tem $2^{n-2}/2$ subconjuntos, a soma das somas alternadas de todos estes pares é igual a $(n+1)2^{n-3}$. De forma análoga, podemos estabelecer uma correspondência bijetiva entre I_1 e I_n, pondo

$$\{1, a_1, a_2, \ldots, a_k\} \leftrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_k, n\}.$$

Assumindo que $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, a soma das somas alternadas para cada um destes pares é

$$(n - a_k + a_{k-1} - \cdots - a_2 + a_1) + (a_k - a_{k-1} + \cdots + a_2 - a_1 + 1) = n + 1.$$

Como I_1 tem $2^{n-2}/2$ subconjuntos, a soma das somas alternadas de todos estes pares é igual a $(n+1)2^{n-3}$.

Concluímos que a soma das somas alternadas de todos os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com um número ímpar de elementos é igual a $(n+1)2^{n-3} + (n+1)2^{n-3} = (n+1)2^{n-2}$. Fazendo $n = 10$ obtemos $11 \cdot 2^8 = 2816$.

4. Vamos resolver o problema para um inteiro $n \geq 2$. Denotemos por P_n o conjunto de todos os pares de inteiros (a, b) tais que $0 < a < b \leq n$, $mdc(a, b) = 1$ e $a + b > n$, e seja S_n a soma

$$S_n = \sum_{(a,b) \in P_n} \frac{1}{ab}.$$

Se $(a, b) \in P_n$ então $(a, b) \in P_{n+1}$ exceto quando $a + b = n + 1$, e se $(a, b) \in P_{n+1}$, então $(a, b) \in P_n$ exceto quando $b = n + 1$. Assim, temos $S_{n+1} - S_n = T - Q$, onde T é a soma de todas as frações $\frac{1}{ab}$ com $(a, b) \in I_{n+1}$ e $b = n + 1$, e Q é a soma de todas as frações $\frac{1}{ab}$ com $(a, b) \in I_n$ e $a + b = n + 1$. Calculemos T:

$$T = \sum_{\substack{1 \leq a < n+1 \\ mdc(a, n+1) = 1}} \frac{1}{(n+1)a} = \sum_{\substack{1 \leq a < \frac{n+1}{2} \\ mdc(a, n+1) = 1}} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n+1-a} \right) = \sum_{\substack{1 \leq a < \frac{n+1}{2} \\ mdc(a, n+1) = 1}} \frac{1}{a(n+1-a)}.$$

Calculemos agora Q, notando que se $(a, b) \in P_n$ e $a + b = n + 1$, então $b = n + 1 - a$ e $a < \frac{n+1}{2}$, uma vez que $n + 1 = a + b > 2a$:

$$Q = \sum_{\substack{1 \leq a < \frac{n+1}{2} \\ mdc(a, n+1-a) = 1}} \frac{1}{a(n+1-a)} = \sum_{\substack{1 \leq a < \frac{n+1}{2} \\ mdc(a, n+1) = 1}} \frac{1}{a(n+1-a)},$$

onde a última igualdade resulta de se ter que se $mdc(x, y) = 1$ então $mdc(y - x, y) = 1$.

Concluímos assim que $T = Q$, ou seja $P_n = P_{n+1}$ pra todo o $n \geq 2$. Segue-se que $S_{200} = S_2 = \frac{1}{2}$.

Nota: Se a, b são inteiros positivos tais que $mdc(a, b) = 1$, então $mdc(a - b, b) = 1$.

Prova: Suponhamos que $d | b$ e que $d | (a - b)$. Então, existem inteiros j, k tais que $b = jd$ e $a - b = kd$, pelo que $a = b + kd = (j + k)d \quad \text{ou seja} \quad d | a$. Segue-se que $mdc(a - b, b)$ é um divisor de $mdc(a, b) = 1$, donde se obtém que $mdc(a - b, b) = 1$.