XXXVIII OPM - Final - 12.09.2020 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Se as fichas numeradas com 1 e 7 estiverem no primeiro monte, então a ficha 4 está no segundo monte. Notemos que as fichas 4 e 6 não estão juntas, pois isso implica que as fichas 2, 5 e 8 estejam no outro monte, e 5 é a média de 2 e 8. Logo a ficha 6 está no mesmo monte que as fichas 1 e 7.

   Como as fichas 6 e 7 estão no primeiro monte, as fichas 5 e 8 estão no segundo monte, o que por sua vez implica que a ficha 2 esteja no primeiro monte com as fichas $1, 6$ e 7.

   Só falta colocar a ficha 3, que não pode ir para o primeiro monte por estarem lá as fichas 1 e 2, nem para o segundo monte por estarem lá as fichas 4 e 5. Logo as fichas 1 e 7 não podem estar juntas.

   As distribuições de fichas $1256/3478$, $1458/2367$ e $1368/2457$ mostram que os restantes pares podem estar juntos.

   Opção correta: B).

   (b) Seja x o número de pinheiros atrás do Gonçalo no momento inicial e y o número de pinheiros à frente do Gonçalo, após este andar 15 pinheiros para a frente. Então temos que $x + 15 = 3y$ e $2x - 15 = y$. Duplicando a primeira equação e subtraindo à segunda, temos $2x - 15 - 2(x + 15) = y - 2 \times 3y$, o que dá $y = 9$. O número total de pinheiros é a soma do número de pinheiros atrás do Gonçalo com o número de pinheiros à frente do Gonçalo com o pinheiro ao lado dele, ou seja, $3y + y + 1 = 37$.

   Opção correta: B).

   (c) Notemos que a existência ou não de números ímpares no subconjunto não afeta a divisibilidade por 4 ou 8. Olhando para os números pares, 8 não pode existir no subconjunto, se 4 existir num conjunto então é o único par, e 2 e 6 ou estão simultaneamente no subconjunto ou não estão de todo.

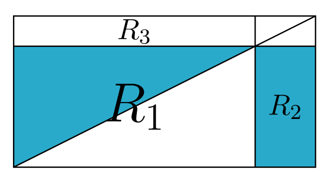
   Se 2 e 6 existirem no subconjunto, qualquer subconjunto de ímpares pode também existir no subconjunto. Como existem 5 ímpares no conjunto $\{1, \dots 9\}$, existem $2^5 = 32$ subconjuntos nestas condições.

   Se 4 existir no subconjunto, tem que também existir no subconjunto um subconjunto não vazio de ímpares, para este ter no mínimo dois elementos. Como existem 5 ímpares no conjunto $\{1, \dots 9\}$, existem $2^5 - 1 = 31$ subconjuntos nestas condições.

   O número de subconjuntos nas condições do enunciado é $32 + 31 = 63$.

   Opção correta: D).

   (d) Seja R_1 o retângulo que completa o triângulo azul. R_1 tem área 32 e como R_1 tem a mesma altura que o retângulo azul (R_2), tem que ter o quádruplo da largura. Logo, os triângulos pequenos em cima de R_2 são semelhantes ao triângulo azul com razão $1/4$. Logo a área destes é de 1 cada. Os triângulos pequenos têm $1/4$ da altura de R_1, logo o rectângulo R_3 da figura tem um quarto da área de R_1, 8, pois tem a mesmo largura. Logo a área do rectângulo grande é $16 + 16 + 8 + 8 + 1 + 1 = 50$. Opção correta: A).



2. A Joana tem $2h30m = 2,5$ horas para carregar totalmente a bateria do telemóvel.

   Se não utilizasse o telemóvel, a bateria ficaria completamente carregada em 2 horas e, ao fim de uma hora, teria apenas metade (50%) da bateria carregada. Por isso, ao fim de x horas ($x \leq 2$) de carregamento sem utilização, a Joana teria $x.50\%$ de bateria carregada.

   Por outro lado, se carregasse e utilizasse em simultâneo o telemóvel durante 2 horas, então ficaria apenas com 60% da bateria carregada. Se carregasse e utilizasse em simultâneo o telemóvel durante uma hora, apenas ficaria com 30% da bateria carregada. Por isso, ao fim de x horas de carregamento e utilização simultâneos, o telemóvel ficaria com $x.30\%$ de bateria carregada.

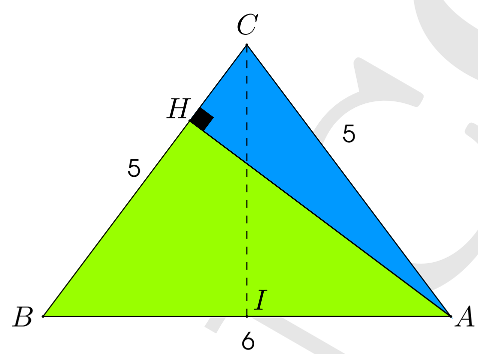
   Assim, se a Joana quer a bateria completamente carregada ao fim de $2h30m$ utilizando o telemóvel durante x horas (e, portanto, não utilizando durante $2,5 - x$ horas), então

$$0,3.x + 0,5(2,5 - x) = 1 \quad (ou \quad 30\%x + 50\%(2,5 - x) = 100\%)$$

   ou seja, $0,2 \times x = 0,25$, logo $x = 1,25$ horas $= 75$ mins.

   Assim, a Joana pode utilizar o telemóvel durante 75 mins.

3. Seja I o pé da perpendicular relativa ao lado $[AB]$.



   Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, pois $\overline{CB} = \overline{CA} = 5$, tem-se $\overline{AI} = \overline{BI} = 3$. O triângulo $[CIA]$ é retângulo e o Teorema de Pitágoras garante que

$$\overline{CI}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{IA}^2 = 4^2,$$

   ou seja, $\overline{CI} = 4$. Pelo critério AA observa-se que os triângulos $[CIB]$ e $[AHB]$ são semelhantes e

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}},$$

   ou seja,

$$\frac{\overline{AH}}{4} = \frac{\overline{HB}}{3} = \frac{6}{5}.$$

   Assim conclui-se que $\overline{AH} = \dfrac{24}{5}$ e $\overline{HB} = \frac{18}{5}$. Portanto $\overline{CH} = 5 - \dfrac{18}{5} = \dfrac{7}{5}$ e

$$\text{área de } [CHA] = \frac{1}{2}\overline{CH} \times \overline{HA} = \frac{1}{2}.\frac{7}{5} \times \frac{24}{5} = \frac{84}{25}\text{ m}^2.$$

4. Seja n o maior número que o João escreveu e k o número que o João apagou.

   Como $1 \leq k \leq n$, então a média calculada pelo João está entre a média dos números $1, 2, \ldots, n-1$ e a média dos números $2, 3, \ldots, n$, ou seja, está entre $n/2$ e $n/2+1$. Assim,

$$\frac{n}{2} \leq 40.75 \leq \frac{n}{2} + 1,$$

   ou seja,

$$79.5 \leq n \leq 81.5.$$

   Portanto temos $n = 80$ ou $n = 81$.

   Para $n = 80$, temos que a soma dos números do quadro é $40,75 \times 79 = 3219,25$, que não é um número inteiro.

   Para $n = 81$, temos que a soma dos números do quadro é $40,75 \times 80 = 3260$. Como $1 + 2 + \cdots + 81 = 3321$, então o número apagado é $3321 - 3260 = 61$ e esta é a única possibilidade.