Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. (*A área do hexágono é igual a* $1,5$ *vezes a área de cada triângulo*)
   (b) Opção C. (*O Manuel gastou* $2/5$ *do dinheiro em peras e* $3/5$ *do dinheiro em maçãs*)
   (c) Opção E. (*Há* 30 *formas de ficarem numa fila e* $29 \times (4^2 + 6^2 + 4^2) = 1972$ *de ficarem em duas*)
   (d) Opção C. (*Há* 10 *escolhas para o* 1° *vértice e* 2 *para cada um dos seguintes:* $\frac{10\times 2^8}{2} = 1280$)

2. Qualquer número de três algarismos, abc, se escreve como $100a + 10b + c$, onde a, b, c são algarismos e $a \neq 0$. O número de três algarismos, abc, é igual a 34 vezes a soma dos seus algarismos se

$$100a + 10b + c = 34(a + b + c) \Leftrightarrow 66a - 33c = 24b \Leftrightarrow 3 \times 11(2a - c) = 24b\,.$$

Como 11 é um número primo, e não é divisor de 24, teria que ser divisor de b, o que é impossível pois $b \leq 9$. Isto implica que $b = 0 = 2a - c$, e portanto as soluções do problema acontecem quando $b = 0$ e $c = 2a$. Temos então quatro soluções: 102, 204, 306 e 408.

3. **Solução 1:** Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[APM]$ obtém-se $\overline{AP} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{27}}{2}$.
Os triângulos $[ABC]$ e $[APM]$ são semelhantes porque têm o ângulo em A em comum e um ângulo reto, logo

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{BC}} \Longleftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{27}}{2}}{6} = \frac{\frac{3}{2}}{\overline{BC}}.$$

Portanto, $\overline{CB} = 2\sqrt{3}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[BMC]$ tem-se $\overline{CM} = \sqrt{3^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{21}$.

Logo, a distância de M a C é $\sqrt{21}$.

Solução 2: Como $[APC]$ é um triângulo retângulo, tem-se

$$\sin \widehat{A} = \frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$$

pelo que $\widehat{A} = 30^\circ$. Como $[ABC]$ é um triângulo retângulo, tem-se

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \widehat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{6}$$

pelo que $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[BMC]$ tem-se $\overline{CM} = \sqrt{3^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{21}$.

4. Sejam a, b e c os números de berlindes azuis, brancos e castanhos, respetivamente. Pela primeira condição, sabemos que $a \geq \dfrac{b}{2}$, ou seja, $b \leq 2a$. Pela terceira condição, sabemos que $a + b > 54$, ou seja, $b > 54 - a$. Logo, $54 - a < b \leq 2a$, pelo que $3a > 54$. Como a é inteiro, temos $a \geq 19$.

Pela segunda condição, $a \leq \dfrac{c}{3}$, ou seja, $c \geq 3a \geq 57$.

Finalmente, se tomarmos $a = 19$, $b = 36$ e $c = 57$, as três condições do enunciado são satisfeitas, logo, o menor número possível de berlindes castanhos no saco é 57.