OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

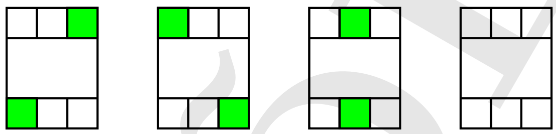
XXXVII OPM - Final - 2º Dia - 06.04.2019 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

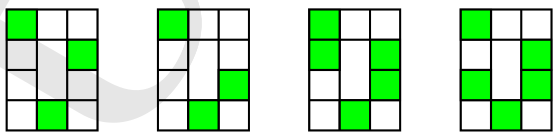
4. Vamos dividir as maneiras de pintar a primeira linha em dois casos: ou há mais casas pintadas de branco ou há mais casas pintadas de verde. O número de maneiras de pintar o tabuleiro é igual em cada caso. Por isso, vamos contar as maneiras de pintar o tabuleiro em que na primeira linha há zero ou um quadrados verdes.

   (a) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes da primeira e da última coluna também for igual, então há 4 maneiras de pintar a primeira e a última linha.

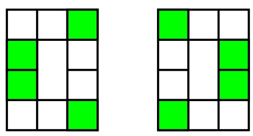


   Para cada um destes casos, há seis maneiras diferentes de pintar os dois quadrados restantes da primeira coluna e os dois quadrados restantes da última coluna: todos de verde, todos de branco e quatro maneiras de pintar um quadrado na primeira e um quadrado na última coluna de cada cor. Há assim $4 \times 6 = 24$ maneiras de colorir o bordo do tabuleiro nestas condições.

   (b) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes na primeira e na última coluna diferem em uma unidade, então há 4 maneiras de pintar a primeira e a última linha. Estas quatro maneiras correspondem a pintar um dos cantos do tabuleiro e o quadrado central da linha oposta de verde, e os restantes quadrados da primeira e da última linha de branco. Para cada um destes casos, há quatro maneiras diferentes de pintar os dois quadrados restantes da primeira coluna e os dois quadrados restantes da última coluna. A figura mostra essas quatro manieras quando o canto superior esquerdo está pintado de verde. Temos assim $4 \times 4 = 16$ maneiras de colorir o bordo do tabuleiro nestas condições.



   (c) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes na primeira e na última coluna diferem em duas unidades, então há apenas duas maneiras de pintar a primeira e a última linha: pintar dois cantos do mesmo lado de verde. Em cada um destes dois casos, só existe uma maneira de pintar os quadrados centrais da primeira e da última coluna.

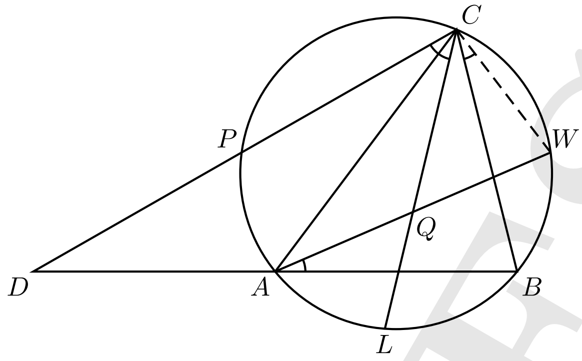


Os dois quadrados centrais do tabuleiro podem ser pintados de verde ou de branco livremente. Portanto, cada coloração dos restantes quadrados corresponde a quatro maneiras diferentes de pintar o tabuleiro.

Finalmente, podemos concluir que há $4 \times 2 \times (24 + 16 + 2) = 336$ maneiras diferentes de pintar o tabuleiro.

5. De $W\hat{C}Q = W\hat{C}B + B\hat{C}Q = L\hat{C}A + B\hat{C}L = B\hat{C}A$ e $C\hat{W}Q = C\hat{W}A = C\hat{B}A$. obtemos a semelhança de triângulos

$$[WCQ] \sim [BCA] .$$



Em particular,

$$W\hat{Q}C = B\hat{A}C.$$

De $D\hat{C}A = P\hat{C}A = A\hat{C}L = A\hat{C}Q$ e $A\hat{Q}C = 180 - W\hat{Q}C = 180 - B\hat{A}C = D\hat{A}C$ obtemos a semelhança de triângulos

$$[DAC] \sim [AQC] .$$

Destas duas semelhanças de triângulos podemos concluir que

$$\frac{\overline{QW}}{\overline{QA}} = \frac{\frac{\overline{QW}}{\overline{QC}}}{\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}} = \frac{\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{DA}}{\overline{AC}}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{DA}} = 1.$$

Assim, $\overline{QA} = \overline{QW}$ e Q é o ponto médio de $[AW]$. De $\overset{\frown}{BW} = \overset{\frown}{LA}$ vem que $[ALBW]$ é um trapézio isósceles. Uma vez que as mediatrizes dos lados paralelos de um trapézio isósceles coincidem, temos que

$$\overline{LQ} = \overline{BQ}.$$

6. Usaremos a notação $A > B$ para indicar que existe uma linha de A para B e a notação $A \gg B$ se existir um caminho de A para B através da rede. Se $A_1 > A_2 > \cdots > A_k > A_1$, dizemos que $(A_1, \ldots, A_k)$ é um $ciclo$. Dada uma estação A, definimos o $bairro$ de A como o conjunto das estações B tais que $A \gg B \gg A$ (incluindo A). Note-se que se B está no bairro de A, então A está no bairro de B.

   Consideremos uma rede dispersa e não corrigível, com n estações. Como a rede é dispersa, tem mais do que um bairro. Sejam $A > B$ estações em bairros diferentes. Se C está no bairro de A e D está no bairro de B, então $C > D$, pois em caso contrário teríamos $A > B \gg D > C \gg A$, pelo que A e B estariam no mesmo bairro.

Suponhamos que a rede tem 3 estações A, B e C em bairros diferentes, com $A > B$. Então $C > A > B$, $A > C > B$ ou $A > B > C$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que é o último caso. Então $A > C$, pois em caso contrário, seria $A > B > C > A$, logo A, B e C estariam no mesmo bairro. Assim, existem estações A e C tais que, para qualquer estação B de outro bairro, se tem $A > B > C$. Então, invertendo as ligações de e para B, obtém-se uma rede tal que $A > C > B > A$ e, para qualquer outra estação D se tem $A \gg D \gg C > B > A$. Deste modo, a rede seria corrigível.

Concluímos assim que uma rede dispersa e não corrigível tem exatamente dois bairros. Suponhamos que um desses bairros tem 4 ou mais estações. Como, dadas duas estações A e B nesse bairro se tem $A \gg B \gg A$, então existe, nesse bairro, um ciclo $(A_1, \cdots, A_k)$. Suponhamos que o ciclo passa por todas as estações do bairro. Então, se $A_{k-1} > A_1$, $(A_1, \ldots, A_{k-1})$ é um ciclo; se $A_1 > A_{k-1}$, (A_1, A_{k-1}, A_k) é um ciclo. Portanto, em qualquer caso, existe nesse bairro um ciclo que não passa por todas as estações do bairro.

Dado um ciclo $(A_1, \cdots, A_k)$ num bairro que não passe por todas as estações, se existe uma estação B nesse bairro tal que $A_i > B > A_j$, então existe um i tal que $A_i > B > A_{i+1}$ (ou $A_k > B > A_1$). Assim, $(A_1, \ldots, A_i, B, A_{i+1}, \ldots, A_k)$ é um ciclo com mais uma estação. Se não existir tal estação, então existem estações B e C nesse bairro tal que $A_i > B > C > A_j$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$. Assim, $(A_1, \ldots, A_{k-1}, B, C)$ é um ciclo com mais uma estação.

Concluímos assim que podemos juntar uma estação a cada ciclo, pelo que existe um ciclo $(A_1, \ldots, A_k)$ que passa por todas as estações de um bairro, exceto uma, digamos B. Suponhamos, sem perda de generalidade, que para cada estação C do outro bairro, se tem $B > C$ e seja i tal que $A_{i+1} > B > A_i$ (ou $A_1 > B > A_k$). Invertendo as ligações de e para B, obtém-se uma rede tal que $B > A_{i+1} > \cdots > A_i > C > B$, logo na nova rede só há um bairro, ou seja, a rede é corrigível.

Deste modo, se uma rede é dispersa e não corrigível, tem exatamente dois bairros, cada um com menos de 4 estações, isto é, cada um com 1 ou 3 estações. Logo $n = 2$, $n = 4$ ou $n = 6$. Para cada um destes valores, existe uma rede dispersa e não corrigível: para $n = 2$, consideremos a rede $\{A, B\}$ com $A > B$; para $n = 4$ consideremos a rede $\{A_1, A_2, A_3, B\}$ com o ciclo (A_1, A_2, A_3) e cada $A_i > B$; para $n = 6$ consideremos a rede $\{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\}$ com os ciclos (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3) e cada $A_i > B_j$.