OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVII OPM - 1ª Eliminatória - 07.11.2018 - Categoria A - 8º/9º anos

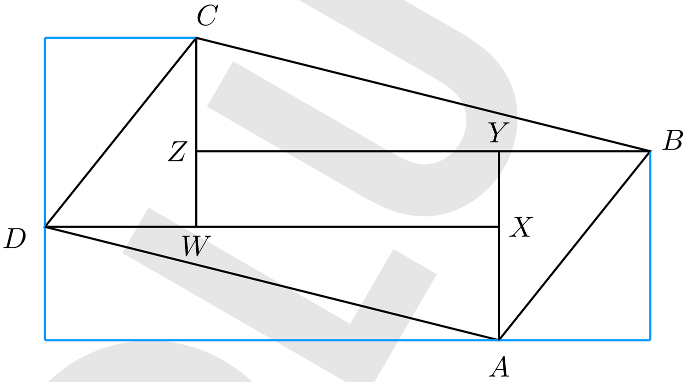
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção C. (24×7, *uma vez que de cada uma das mesas saiu uma pessoa.*)
   (b) Opção B. (*No jantar venderam-se* $\frac{1}{4}$ *dos* $\frac{2}{3}$ *de rifas ainda disponíveis.*)
   (c) Opção B. (*A estrela é composta por quatro triângulos com* $6cm$ *de comprimento e* $3cm$ *de altura.*)
   (d) Opção C. (*Uma solução por linhas é: (1,2,4), (0,5,9), (6,7,8).*)

2. Se a primeira afirmação da Ana for verdadeira, então nenhuma das afirmações do Daniel pode ser verdadeira. Assim, a primeira afirmação da Ana tem de ser falsa e a segunda verdadeira. Portanto, a Constança ficou em terceiro lugar na prova. Isto também significa que a primeira afirmação do Bruno é falsa, sendo a segunda correta, ou seja, o Daniel ficou em segundo lugar. Analisando agora as afirmações do Daniel, concluímos que a sua segunda afirmação tem de ser falsa, pelo que a primeira é verdadeira. Portanto, o Bruno ganhou a corrida, o Daniel ficou em segundo lugar, a Constança em terceiro e a Ana terminou em último lugar.

3. Utilizando segmentos de reta paralelos aos lados dos retângulos da figura divide-se o paralelogramo $[ABCD]$ em quatro triângulos retângulos e no retângulo $[XYZW]$. Os triângulos $[ABY]$ e $[CDW]$ são iguais uma vez que os seus lados são, dois a dois, paralelos e as medidas dos lados $[AB]$ e $[CD]$ são iguais por serem dois dos lados do paralelogramo. Como do enunciado vem que $\overline{DW} = 4$ e que $\overline{AY} = 5$, a área de cada um destes triângulos é $\frac{4\times 5}{2} = 10$. De igual modo se deduz que os triângulos $[BCZ]$ e $[DAX]$ são iguais e têm área igual a $\frac{12\times 3}{2} = 18$. Finalmente, para calcular a área do retângulo, deduzimos que $\overline{WX} = \overline{DX} - \overline{DW} = 12 - 4 = 8$ e que $\overline{YX} = \overline{YA} - \overline{XA} = 5 - 3 = 2$, logo a área do retângulo é 16. Conclui-se então que a área do paralelogramo é $2 \times 10 + 2 \times 18 + 16 = 72$.



4. Cada maneira de pintar dividirá a rua em blocos de casas consecutivas pintadas da mesma cor, cada qual com pelo menos duas casas. Vamos dividir a contagem em casos, dependendo do número de blocos monocromáticos formados.

   Temos no máximo quatro blocos monocromáticos, sendo que nesse caso o tamanho dos blocos tem de ser 3,2,2,2 por alguma ordem, ou seja, há quatro formas de o fazer: $(3,2,2,2)$, $(2,3,2,2)$, $(2,2,3,2)$ e $(2,2,2,3)$. A distribuição de cores por blocos segue apenas a regra de não pintar blocos consecutivos da mesma cor. Temos portanto 4 possibilidades para o primeiro bloco, e 3 para cada um dos restantes, num total de 108 possibilidades. O número total de maneiras válidas de pintar com quatro blocos é $4 \times 108 = 432$.

   Para três blocos temos $(5,2,2)$, com três ordenações possíveis, $(4,3,2)$, com seis ordenações possíveis e $(3,3,3)$ com uma única ordenação, para um total de dez possibilidades. As formas de os pintar são agora $4 \times 3 \times 3 = 36$, dando um total de $10 \times 36 = 360$ possibilidades.

Finalmente, para dois blocos temos $(7,2)$, ou $(6,3)$, ou $(5,4)$, cada um com duas odenações possíveis, para seis possibilidades totais. Cada um tem 12 maneiras de ser pintado logo temos 72 formas válidas.

Há ainda a possibilidade de todas as casas serem pintadas da mesma cor. Adicionando todas as possibilidades temos $432+360+72+4=868$ maneiras diferentes de pintar as casas da rua.