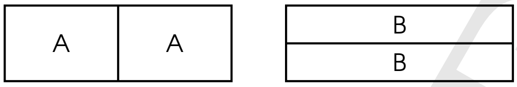
XXXVI OPM - Final - 2º Dia - 24.03.2018 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Podemos dividir o retângulo das duas formas seguintes:



Solução 1: A soma do perímetro de um retângulo A com um retângulo B é igual ao perímetro do retângulo original, mais a soma de metade de todos os seus lados. Ou seja, $50 + 70 = 120$ cm é igual a uma vez e meia o perímetro da ficha de inscrição, o que significa que perímetro da ficha de inscrição é 80 cm.

Solução 2: Se designarmos por x e y os lados do retângulo inicial, temos $2x + y = 50$ e $2y + x = 70$, e portanto $3x + 3y = 120$, donde se conclui que o perímetro da ficha é $2x + 2y = 80$ cm.

Opção correta: A).

(b) Participaram na prova um total de 18 rapazes, sendo 9 do ensino básico e 9 do ensino secundário. Resta descobrir quantas raparigas participaram na prova. Como há 14 participantes de Mirandela, e desses 6 são rapazes, há 8 raparigas de Mirandela. Sabemos ainda que há 7 raparigas que não moram em Mirandela, e portanto o número total de raparigas é $8 + 7 = 15$. A prova teve $18 + 15 = 33$ participantes.

Opção correta: D).

(c) Há 6 possibilidades de escolher quatro algarismos diferentes de modo a que a sua soma seja igual a 11:

- $11 = 8 + 2 + 1 + 0,$
- $11 = 7 + 3 + 1 + 0,$
- $11 = 6 + 4 + 1 + 0,$
- $11 = 6 + 3 + 2 + 0,$
- $11 = 5 + 4 + 2 + 0,$
- $11 = 5 + 3 + 2 + 1.$

Com cada um destes conjuntos de algarismos podemos formar vários números diferentes. Se um dos algarismos for 0 então, para esse conjunto de algarismos, há três hipóteses para escolher o primeiro algarismo, uma vez que um número não pode começar por 0. O segundo algarismo pode ser qualquer um dos outros três, e para terceiro algarismo escolhemos entre os dois que ainda não foram usados. Portanto, em cada um dos cinco primeiros casos, há $3 \times 3 \times 2 = 18$ números possíveis. Por exemplo, com os algarismos $0, 1, 2, 8$ temos os seguintes números: $8210, 8201, 8120, 8102, 8021, 8012, 2810, 2801, 2180, 2108, 2081, 2018, 1820, 1802, 1280, 1208, 1082, 1028$.

O conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$ não tem o algarismo 0. Neste caso, podemos formar com estes algarismos é $4 \times 3 \times 2 = 24$ números diferentes, uma vez que todos os quatro algarismos podem estar na primeira posição. Portanto, existem $5 \times 18 + 24 = 114$ números nas condições do enunciado.

Opção correta: D).

(d) Uma vez que $2017 < 2018$ e $(1+2+\cdots+2016+2017+2016) < (1+2+\cdots+2016+2017+2017)$, conclui-se que $2017(1+2+\cdots+2016+2017+2016) < 2018(1+2+\cdots+2016+2017+2017)$, ou seja, $y < z$.

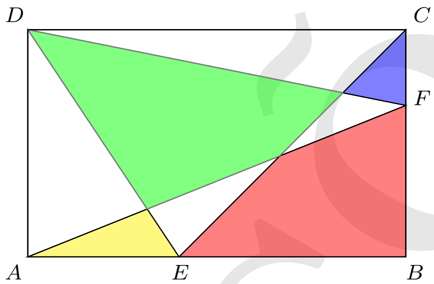
Vamos agora reescrever os números x e y para melhor os podermos comparar.

- $x = 2016(1+2+\cdots+2016+2017+2018) = 2016(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2018 = 2016(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2017+2016$
- $y = 2017(1+2+\cdots+2016+2017+2016) = 2017(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2017 = 2016(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2017+(1+2+\cdots+2016+2017)$

É imediato que $2016 < 1+2+\cdots+2016+2017$, e portanto
$2016(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2017+2016 < 2016(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2017+(1+2+\cdots+2016+2017)$, ou seja $x < y$.

Opção correta: E).

5. Observe-se que a área do retângulo $[ABCD]$ é o dobro da área do triângulo $[AFD]$ e o dobro da área do triângulo $[CDE]$.



Assim,

$$\text{área } [ABCD] = \text{ área } [AFD] + \text{área } [CDE].$$

Por um lado,

$$\text{área } [ABCD] = \text{ área azul + área vermelha + área amarela + área verde +área branca.}$$

Por outro lado, área $[AFD]$ + área $[CDE] = 2\times$ área verde + área branca. Portanto, a área verde é igual à soma das áreas azul, vermelha e amarela, ou seja, $25+5+3 = 33$ dm^2.

6. Comecemos por observar que se escolhermos três fósforos com tamanhos diferentes $2^x < 2^y < 2^z$, então $2^x+2^y < 2^y+2^y = 2\times 2^y = 2^{y+1} \leq 2^z$. Logo, pela desigualdade triangular, não podemos formar um triângulo com lados diferentes.

Assim, temos de escolher dois fósforos com o mesmo tamanho 2^x e um fósforo de tamanho diferente 2^y, uma vez que só há dois fósforos de cada tamanho. Pela desigualdade triangular, temos $2^x+2^x = 2^{x+1} > 2^y$, logo $x+1 > y$, ou seja, $x \geq y$. Como $x \neq y$, temos $x > y$.

Portanto temos de escolher dois números diferentes no conjunto $\{1,2,\ldots,11\}$. Se $x = 11$, há 10 hipóteses para y, se $x = 10$, há 9 hipóteses para y, e assim por diante, até ao caso $x = 2$, em que há só uma hipótese para y. Logo há $10+9+8+\cdots+2+1 = 55$ formas de escolher tais fósforos.