OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

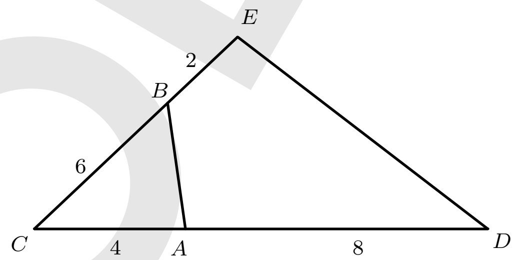
XXXVI OPM - 2ª Eliminatória - 10.01.2018 - Categoria A - 8º/9º anos

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção D.
   (b) Opção E.
   (c) Opção D.
   (d) Opção D.

2. Solução 1: Os triângulos $[ABC]$ e $[ADB]$ têm a mesma altura relativamente ao vértice B. Como a base de $[ADB]$ é o dobro do base de $[ABC]$, a área do triângulo $[ADB]$ mede o dobro da área do triângulo $[ABC]$, logo mede 6 cm^2. Assim, a área do triângulo $[BCD]$ mede $3+6=9$ cm^2. Por outro lado, os triângulos $[BCD]$ e $[BDE]$ têm a mesma altura relativamente ao vértice D. Como a base de $[BDE]$ é a terça parte da base de $[BCD]$, a área do triângulo $[BDE]$ mede um terço da área do triângulo $[BCD]$, logo mede 3 cm^2. Finalmente, a área do triângulo $[CDE]$ mede $3+6+3=12$ cm^2.



Solução 2: Os triângulos $[ECD]$ e $[ACB]$ têm um par de lados proporcionais

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{AC}}=\frac{8}{4}=2 \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}=\frac{12}{6}=2$$

e o ângulo por eles formado comum. Pelo critério de semelhança LAL, os triângulos são semelhantes com razão de semelhança 2. Portanto, a área do triângulo $[ECD]$ mede quatro vezes a área do triângulo $[ACB]$, logo mede 12 cm^2.

3. Um código do João é um número com quatro algarismos diferentes de zero $abcd$ onde $a=b+c+d$. Se $abcd$ é um código então qualquer reordenação dos algarismos b, c e d ainda gera um código. Se os algarismos b, c, d forem todos distintos, há 6 códigos diferentes: $abcd$, $abdc$, $acbd$, $adbc$, $acdb$ e $adcb$. Se exatamente dois dos três algarismos forem iguais, digamos $b=c\neq d$, há 3 códigos diferentes: $abbd$, $abdb$ e $adbb$. Se os três algarismos forem iguais $b=c=d$, há apenas um código $abbb$.

   Como todos os algarismos são diferentes de zero, o primeiro algarismo a tem de ser um número maior ou igual a 3.

   A tabela seguinte indica o número de códigos gerados por cada uma das partições.

Partição	Número de códigos		Partição	Número de códigos
$3=1+1+1$	1		$8=6+1+1$	3
$4=2+1+1$	3		$8=5+2+1$	6
$5=3+1+3$	3		$8=4+3+1$	6
$5=2+2+1$	3		$8=4+2+2$	3
$6=4+1+1$	3		$8=3+3+2$	3
$6=3+2+1$	6		$9=7+1+1$	3
$6=2+2+2$	1		$9=6+2+1$	6
$7=5+1+1$	3		$9=5+3+1$	6
$7=4+2+1$	6		$9=5+2+2$	3
$7=3+3+1$	3		$9=4+4+1$	3
$7=3+2+2$	3		$9=4+3+2$	6
			$9=3+3+3$	1

Conclui-se que há $7 \times 6 + 13 \times 3 + 3 = 84$ códigos diferentes.

4. Os números que se podem obter como pontuação neste jogo escrevem-se na forma $7x + 11y$, onde x e y representam o número de vezes que o jogador obteve 7 e 11 pontos, respetivamente. A tabela seguinte indica todas as pontuações possíveis até 46.

$x \setminus y$	0	1	2	3	4
0	0	11	22	33	44
1	7	18	29	40	$\bullet$
2	14	25	36	$\bullet$	$\bullet$
3	21	32	43	$\bullet$	$\bullet$
4	28	39	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
5	35	46	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
6	42	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

Observe-se que 25 é o menor múltiplo de 5 que é possível obter. Por outro lado, a soma de duas pontuações possíveis ainda é uma pontuação possível. Assim, se entre as pontuações possíveis houver cinco múltiplos consecutivos de cinco, todos os múltiplos de cinco seguintes também são pontuações possíveis. Como $50 = 25 + 25$, $55 = 5 \times 11$, $60 = 35 + 25$, $65 = 40 + 25$ e $70 = 35 + 35$ conclui-se que todos os múltiplos de cinco maiores ou iguais a 50 são pontuações possíveis. Portanto, há apenas seis múltiplos de 5 que são impossíveis de obter como pontuação deste jogo: 5, 10, 15, 20, 30 e 45.