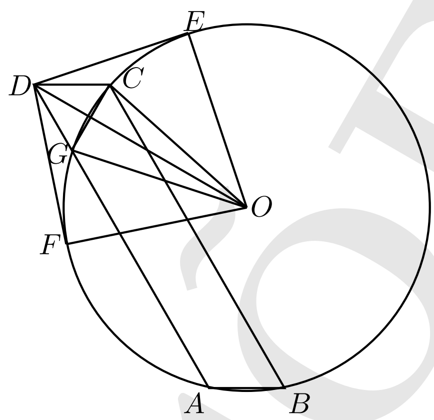
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Sejam O o centro da circunferência e G o segundo ponto de interseção da circunferência com AD.



Como E e F são pontos de tangência a partir de D, então $D\widehat{E}O = D\widehat{F}O = 90°$. Então $[DEO]$ e $[DFO]$ são congruentes, uma vez que $[EO]$ e $[FO]$ são raios e $[DO]$ é comum aos dois triângulos. Logo $O\widehat{D}F = O\widehat{D}E$.

Como $A\widehat{D}E = C\widehat{D}F$, então $C\widehat{D}O = C\widehat{D}F - O\widehat{D}F = G\widehat{D}E - O\widehat{D}E = G\widehat{D}O$. Como anteriormente, concluimos que $[DCO]$ e $[DGO]$ são congruentes. Portanto $\overline{CD} = \overline{GD}$.

Por outro lado, $[BC]$ e $[AG]$ são cordas paralelas, logo $\overline{AB} = \overline{CG}$. Como $[ABCD]$ é um paralelogramo, tem-se $\overline{AB} = \overline{CD}$. Portanto, $\overline{CD} = \overline{CG} = \overline{GD}$, ou seja, $[CGD]$ é equilátero. Assim, $A\widehat{B}C = C\widehat{D}G = 60°$.

Nota: No problema não é referido que $[BC]$ é um diâmetro da circunferência e de facto, isto não acontece em geral.

5. Começamos por escrever $K = 2^x + 4^y + 8^z + 16^2$ como a soma de potências de 2, ou seja, $K = 2^x + 2^{2y} + 2^{3z} + 2^8$.

O número K é igual à soma de quatro potências de 2, e por isso pode ser escrito na forma $K = 2^a+2^b+2^c+2^d$, com $a \leq b \leq c \leq d$. Como $K = 2^a(1+2^{b-a}+2^{c-a}+2^{d-a})$ é uma potência de 2, não tem divisores ímpares e por isso 2^{b-a} tem que ser igual a 1, o que implica $b = a$. Como 8 não é múltiplo de 3, as quatro potências não podem ser iguais. Temos então que $K = 2^a + 2^a + 2^c + 2^d = 2^{a+1} + 2^c + 2^d$, com $a < c \leq d$, e usando sucessivamente o mesmo argumento, concluímos que $c = a + 1$ e que $d = c + 1 = a + 2$. O número K é assim da forma $2^a + 2^a + 2^{a+1} + 2^{a+2}$. Como 8 e $2y$ são números pares, a também tem que ser um número par, e portanto $8 = a + 2$ ou $8 = a$. Se $a = 6$, então $3z = 6$, porque 6 é o único múltiplo de 3 no conjunto $\{6, 7, 8\}$, $2y = 6$ porque $2y$ é um número par, e consequentemente $x = 7$. Se $a = 8$, então $3z$ tem que ser igual a 9 e a partir daqui tanto pode ser $x = 8$ e $2y = 10$, como $x = 10$ e $2y = 8$.

Existem portanto três soluções $(x, y, z) = (7, 3, 2)$, $(x, y, z) = (8, 5, 3)$ e $(x, y, z) = (10, 4, 3)$.

6. Observamos primeiro que o número 1 tem de ser pintado de azul. De facto, se 1 for verde, dado um número azul A, como $1 \times A = A$, concluímos, pela segunda regra, que A é verde, o que é falso. Logo, 1 tem de ser azul.

   Sejam V_1 e V_2 dois números pintados de verde então, usando a primeira regra e o facto de 1 ser azul, $V_1 + 1$ é um número azul. Assim, pela segunda regra, $V_2 \times (V_1 + 1) = V_1 \times V_2 + V_2$ é verde, de onde se conclui que $V_1 \times V_2$ também é verde, para não contradizer a primeira regra. Este argumento, juntamente com a segunda regra, prova que o produto de um número verde por qualquer outro número natural é sempre verde. Por outras palavras, todos os múltiplos de um número pintado de verde são números pintados de verde.

   Seja v o menor de todos os números naturais pintados de verde. Já vimos que $v \neq 1$. Podemos facilmente argumentar que $v \neq 2$. Pois se 2 fosse verde, então também $462 = 2 \times 231$ teria de ser verde, o que não acontece. Analogamente, $v \neq 3$.

   Sabemos que $v, 2v, 3v, \ldots, kv, \ldots$, são todos números pintados de verde. Vamos agora mostrar que estes são os únicos números naturais pintados de verde. Por definição de v, sabemos que todos os números naturais menores do que v

$$1, 2, \ldots, v-2, v-1$$

   são azuis. Somando v a cada um desses naturais obtemos os números

$$v+1, v+2, \ldots, 2v-2, 2v-1,$$

   também eles todos azuis, pela primeira regra. Provámos assim que todos os números naturais estritamente contidos entre v e $2v$ são azuis. Somando novamente v, provamos que todos os números naturais estritamente contidos entre $2v$ e $3v$ são azuis. Assim sucessivamente, se prova que os únicos números naturais pintados de verde são os múltiplos de v.

   Para pintar os números naturais de acordo com o enunciado, temos então de escolher um número natural v que divide 2016 mas não divide 462. O número $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$ tem 36 divisores, todos da forma:

$$2^a \times 3^b \times 7^c, \quad \text{com } a \in \{0, \ldots, 5\},\ b \in \{0,1,2\} \text{ e } c \in \{0,1\}.$$

   Destes 36 divisores, há 8 que também são divisores de $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$. São os números:

$$2^a \times 3^b \times 7^c, \quad \text{com } a \in \{0,1\},\ b \in \{0,1\} \text{ e } c \in \{0,1\}.$$

   Portanto existem $36 - 8 = 28$ números naturais v nas condições pretendidas e cada um desses números naturais v define uma forma de pintar os números naturais que respeita as regras do enunciado.