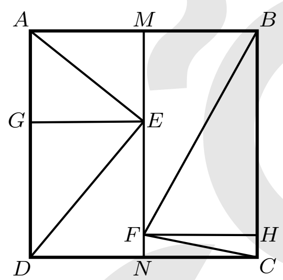
XXXIV OPM - 2ª Eliminatória - 13.01.2016 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção B.
   (b) Opção C.
   (c) Opção D.
   (d) Opção A.

2. Sejam M e N os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[CD]$, respetivamente. Sejam G e H os pés das alturas dos triângulos $[AED]$ e $[BCF]$, como indicado na figura.



A reta MN é paralela à reta AD logo $\overline{GE} = \overline{AM} = 5$ cm. Assim, a área do triângulo $[AED]$ mede $\frac{\overline{AD}\times\overline{GE}}{2} = \frac{10\times 5}{2} = 25$ cm^2. Analogamente, tem-se $\overline{FH} = 5$ cm e o triângulo $[BCF]$ tem uma área de $\frac{\overline{BC}\times\overline{FH}}{2} = 25$ cm^2. Dado que o hexágono se obtém do quadrado $[ABCD]$ retirando os triângulos $[AED]$ e $[BCF]$, a sua área mede $10^2 - 2\times 25 = 50$ cm^2.

3. Os três primeiros algarismos do código têm de ser escolhidos no conjunto $\{1, 2, 7, 8\}$. Há quatro escolhas possíveis para o primeiro algarismo. Como o código não tem algarismos repetidos, há três escolhas possíveis para o segundo algarismo e duas para o terceiro. Assim há $4\times 3\times 2 = 24$ formas de escolher os três primeiros algarismos do código. O último algarismo tem de ser escolhido no conjunto $\{0, 3, 4, 5, 6, 9\}$, logo há seis possibilidades. Concluímos que é possível formar $24\times 6 = 144$ códigos nas condições pretendidas.

4. A fatorização de 2016 é $2016 = 2^5\times 3^2\times 7$. Como

$$2016 = 2^5\times 3^2\times 7 = \text{número de mulheres} \times \text{número de rosas de cada ramo} \times \text{preço de uma rosa}$$

e o preço de uma rosa é seis vezes o preço de uma tulipa,

$$2^4\times 3\times 7 = \text{número de mulheres} \times \text{número de rosas de cada ramo} \times \textit{preço de uma tulipa}.$$

Uma vez que três quartos dos convidados eram do sexo feminino, havia, entre os convidados, três vezes mais mulheres do que homens, pelo que

$$2^4\times 7 = \textit{número de homens} \times \text{número de rosas de cada ramo} \times \text{preço de uma tulipa}.$$

Como o número de rosas de cada ramo é ímpar, este número só pode ser 7, logo

$$2^4 = \text{número de homens} \times \text{preço de uma tulipa}.$$

Sabendo que o Romeu tinha entre 20 e 60 convidados e destes um quarto eram homens, havia entre 5 e 15 convidados do sexo masculino. Como a única potência de 2 neste intervalo é $2^3 = 8$, conclui-se que na festa havia 8 homens e que cada tulipa custava 2 euros.