OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXIII OPM - 1ª Eliminatória - 12.11.2014 - Categoria B - 10º/12º anos

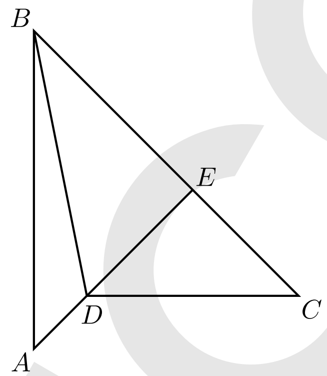
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Designe-se por M o número de matemáticos, por F o número de físicos, por Q o número de químicos e por B o número de biólogos. Sabe-se que $M+F+Q+B=30$, $F+Q=2B$ e $M=2(F+B)$. Substituindo a segunda e a terceira igualdade na primeira obtém-se $2F+5B=30$.

   Portanto $5B=30-2F$, ou seja, $5B$ é um número par inferior a 30. Logo $5B=10$ ou $5B=20$. Logo o número de biólogos só poderá ser 2 (e $F=10$) ou 4 (e $F=5$). Por outro lado, como $F+Q=2B$, tem-se que $2B$ é maior do que F, logo o número de biólogos é 4, o número de físicos é 5 e o número de matemáticos é 18.

2. Seja E a interseção de AD e BC. Como $\hat{A}=\hat{B}=45°$, o triângulo $[ABE]$ é isósceles e retângulo em E. Assim, a área de $[ABE]$ é $\frac{1}{2}\overline{BE}^2$. Analogamente, o triângulo $[DEC]$ é isósceles e retângulo em E, logo a área de $[DEC]$ é $\frac{1}{2}\overline{DE}^2$.



   Assim, como a área de $[ABCD]$ é igual à soma das áreas de $[ABE]$ e $[DEC]$, então a área de $[ABCD]$ é

$$\frac{1}{2}\left(\overline{BE}^2+\overline{DE}^2\right).$$

   Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{BE}^2+\overline{DE}^2=\overline{BD}^2$, logo a área de $[ABCD]$ é $\frac{1}{2}\overline{BD}^2$, ou seja, 18 cm^2.

3. Os algarismos que são divisores de 60 são $1,2,3,4,5,6$.

   O único que pode aparecer repetido é o 2. Neste caso, o produto dos algarismos para além dos dois algarismos 2 é $60/(2\times 2)=15$, ou seja, são o 3 e o 5. Os algarismos 2 podem estar nas seguintes seis posições: $22**$, $2*2*$, $2**2$, $*22*$, $*2*2$ e $**22$. Para cada uma delas, os outros algarismos podem aparecer na ordem $3,5$ ou $5,3$. Portanto há $6\times 2=12$ números possíveis.

   Se nenhum algarismo aparece repetido, então, como $1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6=720$, o produto dos dois algarismos que não aparecem é $720/60=12$. Deste modo, os algarimos que não aparecem são o 2 e o 6, ou o 3 e o 4. Portanto há dois casos possíveis. Para cada um deles, os algarimos podem ser ordenados de $4\times 3\times 2\times 1=24$ formas diferentes, logo há $2\times 24=48$ números possíveis.

   Assim, ao todo há $12+48=60$ números de 4 algarismos cujo produto é 60.

4. Suponhamos que uma das caixas tem duas ou menos bolas. Então essas bolas aparecem em no máximo 4 outras caixas, logo a sexta caixa não tem nenhuma bola com um número em comum. Conclui-se assim que cada caixa tem pelo menos 3 bolas, ou seja, ao todo há pelo menos $6\times 3=18$ bolas. Portanto, $n\geq 6$.

   Para mostrar que $n=6$ é um valor possível, basta verificar que as caixas com os números seguintes verificam as condições pretendidas: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,5,6\}$, $\{3,4,6\}$ e $\{3,4,5\}$.