Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Quanto maior o valor do inteiro x, menor o valor de $1+\frac{1}{x}$. Assim, se $x \geq 3$, o maior valor que o produto poderia tomar, seria quando $x = y = z = 3$, em cujo caso

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3.$$

Assim, para que a identidade se verifique, temos de ter $x = 1$ ou $x = 2$.

- Se $x = 2$ e $y \geq 3$ então o maior valor possível seria quando $x = 2$, $y = z = 3$ que daria

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{48}{18}\right) < 3.$$

Assim a única hipótese seria $y = 2$.
Resolvendo a equação para z temos

$$1+\frac{1}{z} = \frac{3xy}{(x+1)(y+1)},$$

ou seja,

$$z = \frac{(x+1)(y+1)}{2xy - x - y - 1)}.$$

Sendo $x = 2$ e $y = 2$ temos neste caso $z = \frac{9}{3} = 3$, que verifica as condições pretendidas.

- Se $x = 1$ e $y \geq 5$ então o maior valor possível seria quando $x = 1$, $y = z = 5$, ou seja

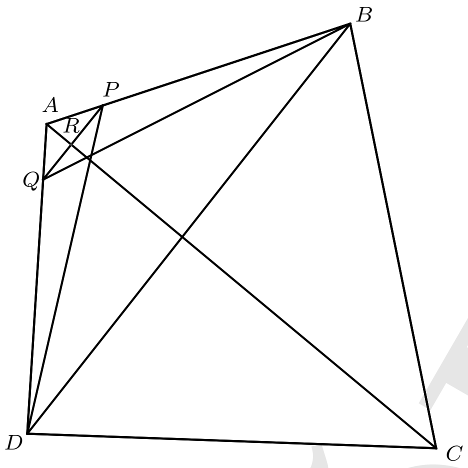
$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{72}{25}\right) < 3.$$

Assim, y terá de estar entre 1 e 4. Substituindo cada valor possível de x e y na equação de z, resulta em

y	1	2	3	4
z	-4	Impossível	8	5

Temos assim três soluções nas condições pretendidas, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 8)$, e $(1, 4, 5)$.

5. Uma vez que as áreas dos triângulos $[ABQ]$ e $[ADP]$ são iguais, os triângulos $[QPD]$ e $[QPB]$ também têm a mesma área. Considerando $[QP]$ como base destes dois triângulos conclui-se que as alturas relativas a esta base são iguais, ou seja, a distância dos pontos D e B à reta PQ é a mesma, e portanto $[QP]$ é paralelo a $[DB]$.



Seja h a distância do ponto A a $[PQ]$, h_1 a distância de A a $[BD]$ e h_2 a distância de C a $[BD]$. Usando semelhança de triângulos, tem-se

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\text{área}[APD]}{\text{área}[ABD]} = \frac{1}{\frac{1}{2}\overline{BD}h_1}.$$

Logo, conclui-se que $h = \frac{2}{\overline{BD}}$. Por outro lado, $2014 = \frac{1}{2}\overline{BD}(h_1 + h_2)$, isto é, $h_1 + h_2 = 2014h$. Seja X o ponto de interseção das diagonais do quadrilátero. De novo por semelhança de triângulos, tem-se

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{AX} + \overline{XC}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{AR}} + \frac{\overline{XC}}{\overline{AR}} = \frac{h_1}{h} + \frac{h_2}{h} = \frac{h_1 + h_2}{h} = 2014.$$

Finalmente, tem-se

$$\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{AC} - \overline{AR}}{\overline{AR}} = 2014 - 1 = 2013.$$

6. No primeiro concerto há pelo menos 50 músicos a tocar ou pelo menos 50 músicos a ouvir na plateia. No segundo concerto, destes 50 músicos, há pelo menos 25 músicos a tocar ou pelo menos 25 músicos a ouvir na plateia. No terceiro concerto, destes 25 músicos, há pelo menos 13 músicos a tocar ou pelo menos 13 músicos a ouvir na plateia. No quarto concerto, destes 13 músicos, há pelo menos 7 músicos a tocar ou pelo menos 7 músicos a ouvir na plateia. No quinto concerto, destes 7 músicos, há pelo menos 4 músicos a tocar ou pelo menos 4 músicos a ouvir na plateia.

   Cada um destes 4 músicos tem que ouvir os restantes 3 músicos, logo ao todo tem de haver pelo menos $4 \times 3 = 12$ audições. Em cada concerto há no máximo $2 \times 2 = 4$ audições, o que acontece quando 2 músicos tocam e 2 músicos estão na plateia. Se houvesse apenas 3 concertos, cada um seria tocado por 2 músicos. Portanto cada um dos músicos tem de tocar pelo menos 2 vezes, e portanto são necessários pelo menos 4 concertos para que os 4 músicos se ouçam mutuamente. Assim o festival tem de ter pelo menos 9 concertos.

   Para mostrar que 9 concertos são suficientes, observemos que há $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = 126$ conjuntos de 4 concertos. Se cada músico escolher um conjunto distinto, então cada um dos restantes músicos toca num conjunto de concertos diferente e portanto estará na plateia nalgum dos concertos.