



*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.  
Não é permitido o uso de calculadoras.*

1. O Alberto e a Beatriz fazem anos hoje e têm a seguinte conversa:  
-Alberto: Quando eu tinha mais dois anos do que tu tens hoje, já sabia de cor 1211 casas decimais consecutivas do número  $\pi$ .  
-Beatriz: E nessa altura a minha idade era 12 vezes inferior à idade que terás dentro de 11 anos.  
Sabendo que a Beatriz é uma adolescente, quantos anos faz hoje o Alberto?
2. Duas circunferências  $C_1$  e  $C_2$  são tangentes no ponto  $X$ . Uma reta tangente exterior e comum às duas circunferências intersesta  $C_1$  em  $A$  e  $C_2$  em  $B$ . Seja  $[AP]$  um diâmetro da circunferência  $C_1$ . Prova que  $B$ ,  $X$  e  $P$  pertencem à mesma reta.
3. Ao implantar um bairro residencial construíram-se nove avenidas no sentido norte-sul e seis avenidas no sentido este-oeste, formando quarteirões quadrados com 100m de lado. Os bombeiros aconselharam a colocação de pontos de água para incêndio em algumas das interseções, respeitando a seguinte regra: nenhuma interseção deve estar a mais do que 200m de distância de um ponto de água. Qual o número mínimo de pontos de água que podem ser colocados de forma a respeitar a recomendação dos bombeiros?
4. A cada inteiro atribui-se uma, e apenas uma, de duas cores, vermelho ou azul. Sabe-se que para qualquer conjunto  $A$  de inteiros consecutivos, o valor absoluto da diferença entre o número de elementos de  $A$  de cor azul e o número de elementos de  $A$  de cor vermelha é menor do que 1008. Prova que existe um conjunto de 2014 inteiros consecutivos com 1007 inteiros de cor azul e 1007 inteiros de cor vermelha.