XXXII OPM - 1ª Eliminatória - 13.11.2013 - Categoria B - 10°/12° anos

Cada questão vale 10 pontos

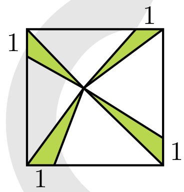
Sugestões para a resolução dos problemas

1. A sucessão começa do seguinte modo:

$$13,\ 11,\ 2013,\ 12,\ 10,\ 2012,\ 11,\ 9,\ 2011,\ 10,\ 8,\ 2010,\ 9, \ldots$$

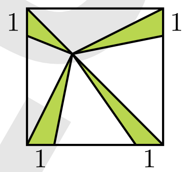
Com efeito, como os números nas posições $2, 3$ e 4 somam $2036 = 2037 - 1$, o número na posição $4 = 1 + 3$ obtém-se do número na posição 1 subtraindo-lhe uma unidade, ou seja, na posição 4 encontra-se o número 12. Do mesmo modo, como os números nas posições $3, 4$ e 5 somam $2035 = 2036 - 1$, o número na posição $5 = 2 + 3$ obtém-se do número na posição 2 subtraindo-lhe uma unidade, ou seja, na posição 5 encontra-se o número 10. Em geral, o número numa determinada posição é superior em uma unidade ao número na posição três unidades à frente. Logo, a posição em que volta a aparecer o número 13 será a posição $3 + 3 \times (2013 - 13) = 6003$.

2. Se os quatro pontos escolhidos a 1 cm dos vértices estão, dois a dois, em lados opostos do quadrado, como na figura

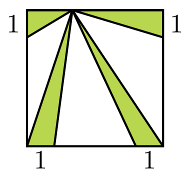


então, dois triângulos opostos têm uma base de 1 cm e a soma das suas alturas é 5 cm. Logo, a soma das áreas de dois triângulos opostos é $\frac{5}{2}$ cm^2, pelo que a soma das áreas dos quatro triângulos é 5 cm^2.

Se para um dos pontos escolhidos a 1 cm do vértice, não foi escolhido nenhum ponto no lado oposto, como na figura



então, como no caso anterior, há dois triangulos opostos cuja área total é $\frac{5}{2}$ cm^2. Os dois triângulos restantes têm base 1 cm e a área de cada um é tanto maior quanto maior for a altura respetiva. Esta altura é no máximo 5 cm, o que acontece se o último ponto escolhido estiver no lado oposto às bases dos dois triângulos. Neste caso a área de cada um destes dois triângulos é $\frac{5}{2}$ cm^2 e a área total é $3 \times \frac{5}{2}$ cm$^2 = \frac{15}{2}$ cm^2.



A área máxima é, assim, $\frac{15}{2}$ cm^2.

3. A combinação do cofre do Ivo pode ser escrita na forma $100a + 10b + c$, onde a, b e c são os algarismos respetivos. O número escrito na ordem inversa é $100c + 10b + a$. Então,

$$100a + 10b + c - 693 = 100c + 10b + a,$$

ou seja, $99a - 99c = 693$. Logo $a - c = 7$, pelo que $(a = 7, c = 0)$, $(a = 8, c = 1)$ ou $(a = 9, c = 2)$, podendo b ser um qualquer algarismo entre 0 a 9. Assim, há $3 \times 10 = 30$ soluções.

4. Designemos as cores das casas do tabuleiro de C_1 a C_9, como na figura.

C_1	C_2	C_3
C_4	C_5	C_6
C_7	C_8	C_9

Como cada quadrícula pode ser pintada ou não, há $2^9 = 512$ formas de pintar o tabuleiro. No entanto, algumas destas formas obtêm-se de outras através de rotações do tabuleiro (de $90°$, $180°$ ou $270°$).

C_3	C_6	C_9
C_2	C_5	C_8
C_1	C_4	C_7

C_9	C_8	C_7
C_6	C_5	C_4
C_3	C_2	C_1

C_7	C_4	C_1
C_8	C_5	C_2
C_9	C_6	C_3

Se $C_1 = C_3 = C_7 = C_9$ e $C_2 = C_4 = C_6 = C_8$, então as quatro formas de pintar apresentadas são iguais. Há $2^3 = 8$ maneiras de isto acontecer, o que corresponde a 8 formas distintas de pintar o tabuleiro.

Se $C_1 = C_9$, $C_3 = C_7$, $C_2 = C_8$, $C_4 = C_6$, mas não acontece o caso anterior, então a primeira forma de pintar é igual à terceira, e a segunda é igual à quarta. Há $2^5 - 8 = 24$ maneiras de isto acontecer, o que corresponde a $24/2 = 12$ formas distintas de pintar o tabuleiro.

Em qualquer outro caso, as quatro formas de pintar apresentadas são diferentes. Há $512 - 8 - 24 = 480$ maneiras de isto acontecer, o que corresponde a $480/4 = 120$ formas distintas de pintar o tabuleiro.

Assim, ao todo há $8 + 12 + 120 = 140$ formas distintas de pintar o tabuleiro.