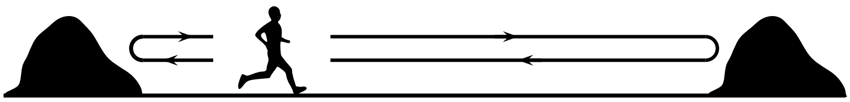
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.*
*Não é permitido o uso de calculadoras.*

1. Considere-se um paralelogramo $[ABCD]$ tal que o ângulo $\angle DAB$ é agudo. Seja $G$ um ponto na reta $AB$ distinto de $B$ tal que $\overline{BC} = \overline{GC}$, e seja $H$ um ponto na reta $BC$ distinto de $B$ tal que $\overline{AB} = \overline{AH}$. Prova que o triângulo $[GDH]$ é isósceles.

2. Três veraneantes, $A$, $B$ e $C$, costumam fazer uma corrida matinal numa praia de Albufeira. Num certo dia, encontraram-se num ponto da praia e começaram a correr ao mesmo tempo, cada um ao seu ritmo, que mantiveram durante toda a corrida. Cada vez que chegavam a um dos extremos da praia, invertiam o sentido. Cada par de corredores nunca se encontrou nos extremos da praia. No momento em que $A$, $B$ e $C$ estavam novamente todos juntos, decidiram terminar a corrida. Para além dos momentos inicial e final, $A$ encontrou $B$ seis vezes e encontrou $C$ oito vezes. Quantas vezes se encontraram $B$ e $C$?



3. Na República do Unistão existem $n$ estradas nacionais, cada uma ligando exatamente duas cidades, sendo sempre possível viajar entre quaisquer duas cidades percorrendo uma sequência de estradas. O Presidente do Unistão mandou numerar as estradas nacionais de $1$ até $n$, lembrando uma lei antiga: sempre que uma cidade seja servida por mais do que uma estrada, o máximo divisor comum dos seus números tem que ser um. Mostra que é possível numerar as estradas sem violar a lei.