XXX OPM - Final - 1º Dia - 23.03.2012 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. O algarismo central c de uma cordilheira pode variar de 0 a 8.

   Para um dado valor de c, os algarismos b e d podem variar de $c+1$ até 9. Para um dado valor de b, o algarismo a pode variar de 1 até $b-1$, ou seja, existem $b-1$ possibilidades. Para um dado valor de d, o algarismo e pode variar de 0 até $d-1$, ou seja, existem d possibilidades.

   Assim, para um dado valor de c, existem $c+(c+1)+\cdots+8$ possibilidades para o par (a,b) e existem $(c+1)+(c+2)+\cdots+9$ possibilidades possibilidades para o par (d,e).

   Se $c=0$ há $(0+1+2+3+4+5+6+7+8)\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=1620$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=1$ há $(1+2+3+4+5+6+7+8)\times(2+3+4+5+6+7+8+9)=1584$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=2$ há $(2+3+4+5+6+7+8)\times(3+4+5+6+7+8+9)=1470$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=3$ há $(3+4+5+6+7+8)\times(4+5+6+7+8+9)=1287$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=4$ há $(4+5+6+7+8)\times(5+6+7+8+9)=1050$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=5$ há $(5+6+7+8)\times(6+7+8+9)=780$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

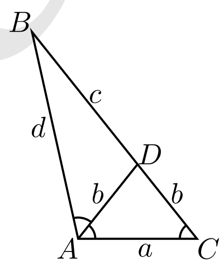
   Se $c=6$ há $(6+7+8)\times(7+8+9)=504$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=7$ há $(7+8)\times(8+9)=255$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=8$ há $8\times 9=72$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Portanto existem $1620+1584+1470+1287+1050+780+504+255+72=8622$ cordilheiras.

2. Sejam $a=\overline{AC}$, $b=\overline{AD}=\overline{DC}$, $c=\overline{BD}$ e $d=\overline{AB}$, números inteiros.



   Como $[AD]$ é a bissetriz de $\angle BAC$ e $[DAC]$ é isósceles com base $[AC]$, então $B\hat{A}D=D\hat{A}C=D\hat{C}A$.

   Então tem-se $[ABC]\sim[DAB]$, logo
$$\frac{b+c}{d}=\frac{d}{c}=\frac{a}{b}.$$

   Seja k o máximo divisor comum de b e c. Então $b=ke$, $c=kf$, onde e e f são primos entre si.

   Portanto, $d^2=c(b+c)=k^2f(e+f)$ e $a^2=\dfrac{b^2d^2}{c^2}=\dfrac{k^2e^2k^2f(e+f)}{k^2f^2}=\dfrac{k^2e^2(e+f)}{f}$.

Como e e f são primos entre si e a é inteiro, então f divide k^2.

Por outro lado, se k e a tivessem algum fator comum, então dividindo a, b, c, d por este fator daria origem a um triângulo nas condições do enunciado, com menor perímetro. Logo, podemos supor que k e a são primos entre si, donde se conclui que k^2 divide f.

Portanto $f = k^2$, o que implica que $c = k^3$, $d^2 = k^4(e + k^2)$ e $a^2 = e^2(e + k^2)$.

Pela desigualdade triangular, tem-se $a < 2b$. Elevando ao quadrado, obtém-se $e^2(e + k^2) < 4k^2e^2$, ou seja, $e < 3k^2$.

Se $k = 1$, então $e < 3$ e portanto $d^2 = e + 1$ é impossível.

Se $k = 2$, então $a^2 = e^2(e + 4)$, $b = 2e$, $c = 8$, $d^2 = 16(e + 4)$, com $e < 12$. Então $e = 5$, donde $a = 15$, $b = 10$, $c = 8$, $d = 12$. O perímetro de $[ABC]$ é então $15 + 10 + 8 + 12 = 45$.

Se $k \geq 3$, então $d > c \geq 27$, logo o perímetro de $[ABC]$ é maior do que 54.

3. Designe-se por PP uma situação em que ambos os sacos têm um número par de berlindes, por PI quando um dos sacos tem um número par de berlindes e o outro tem um número ímpar e por II quando ambos os sacos têm um número ímpar de berlindes.

   Se inicialmente se tiver uma situação PP, depois da jogada do Luís há apenas dois resultados possíveis: PI ou II. Em cada um dos casos, a Helena pode voltar a uma situação PP, diminuindo o número total de berlindes. Assim, eventualmente a Helena chegará à situação em que ambos os sacos estão vazios e portanto ganha o jogo.

   Se inicialmente se tiver uma situação PI ou II, o Luís pode retirar berlindes para obter uma situação PP e portanto eventualmente ganhará o jogo.