Olimpíadas Portuguesas
de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXV OPM - Final - 1º dia - 23.03.2007 - Categoria A

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Em cada uma das alíneas seguintes escolhe a opção correcta, justificando a tua escolha.

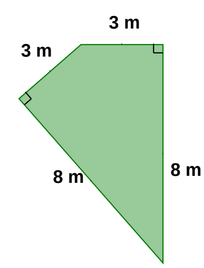
(a) Na quinta do Senhor Jaime todos os trabalhadores falam português, inglês ou espanhol. Nove deles falam português, oito inglês e sete espanhol. Cinco trabalhadores falam inglês e português, quatro falam inglês e espanhol e três espanhol e português. Apenas dois falam as três línguas. Quantos trabalhadores há na quinta?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 20 E) 22

(b) A quinta produz duas qualidades de sumo de laranja, a L-Laranja com 5% de concentrado de laranja e a S-Laranja com 2%. Em que razão deve ser misturada a L-Laranja com a S-Laranja para obter a M-Laranja com 4% de concentrado de laranja?

A) 1 para 3 B) 1 para 2 C) 2 para 3 D) 2 para 1 E) 3 para 2

(c) A quinta tem um jardim quadrado com um lago também quadrado no seu centro. O Senhor Jaime dividiu o jardim em quatro canteiros iguais ao indicado na figura. Quanto mede o lado do lago?

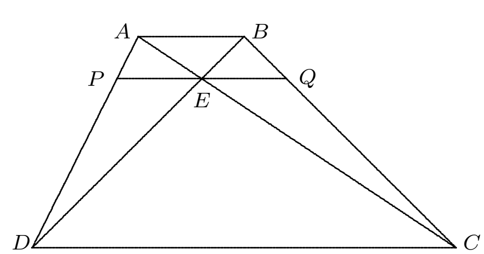


A) 2 m B) 3 m C) 5 m D) 8 m E) 11 m

(d) O produto das idades das filhas do Senhor Jaime é 1664. Se a mais nova tem pelo menos metade da idade da mais velha e a mais velha tem menos do que 35 anos, quantas filhas tem o Senhor Jaime?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2. No trapézio $[ABCD]$, os lados $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos e medem 2 cm e 6 cm, respectivamente. As diagonais do trapézio intersectam-se em E. A recta paralela a $[AB]$ que passa por E intersecta os lados $[AD]$ e $[BC]$ em P e Q, respectivamente. Qual é o comprimento de $[PQ]$?



3. O João tinha pérolas azuis, brancas e vermelhas e com elas construiu um colar com 20 pérolas que tem tantas pérolas azuis como brancas. O João reparou que, independentemente do modo como cortasse o colar em duas partes, ambas com um número par de pérolas, uma das partes teria sempre mais pérolas azuis do que brancas. Quantas pérolas vermelhas tem o colar do João?

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXV OPM - Final - 2º dia - 24.03.2007 - Categoria A

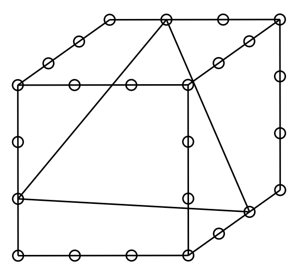
Duração: 3 horas

Cada questão vale 10 pontos

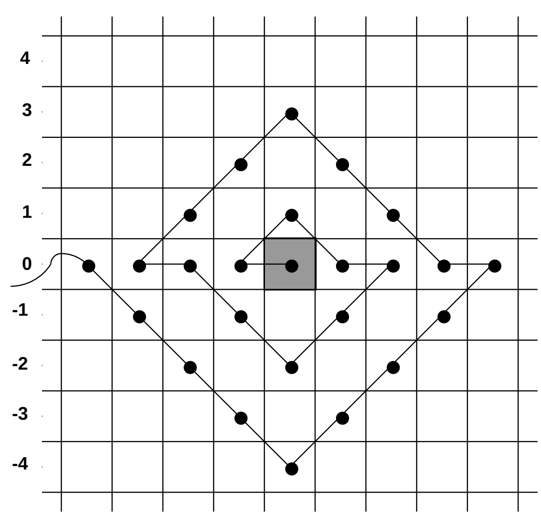
Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. O Afonso escreveu o menor número inteiro positivo que é divisível por todos os números inteiros entre 2 e 31, excepto 2 deles, que são consecutivos. Qual é o algarismo das centenas do número escrito pelo Afonso?

5. No teatro Ideias, o palco é cúbico, com 6 metros de lado. Em cada aresta existem argolas, de 2 em 2 metros, para prender o cenário. Na peça em cena, o cenário é constituído por um triângulo de tecido, preso nas argolas, como mostra a figura. Qual é a área do tecido?



6. A Fernanda resolveu enfeitar uma manta de quadrados com uma fita e botões, pondo um botão no centro de cada quadrado onde passa a fita e formando o desenho indicado na figura. Se a Fernanda cose o primeiro botão no quadrado sombreado da linha 0, em que linha cose o 2007^o botão?



Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

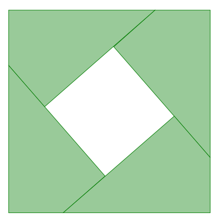
1. (a) Como há apenas dois trabalhadores que falam as três línguas, há $5-2=3$ que só falam inglês e português, $4-2=2$ que só falam inglês e espanhol e $3-2=1$ que só fala espanhol e português. Assim, há $9-3-1-2=3$ que só falam português, $8-3-2-2=1$ que só fala inglês e $7-2-1-2=2$ que só falam espanhol. Logo, o número de trabalhadores é $2+3+2+1+3+1+2=14$.

   Opção correcta: B).

   (b) Sejam x a porção de L-Laranja e $1-x$ a porção de S-Laranja na M-Laranja. Tem-se $5x+2(1-x)=4$, ou seja, $x=\dfrac{2}{3}$ e $1-x=\dfrac{1}{3}$. Logo, $\dfrac{x}{1-x}=2$.

   Opção correcta: D).

   (c) O Senhor Jaime dividiu o jardim em quatro canteiros da forma indicada na figura, pelo que o lago mede $8-3=5$ metros de lado.



   Opção correcta: C).

   (d) Uma vez que $1664=2^7\times 13$, a irmã mais velha tem pelo menos 13 anos.

   Se a mais velha tiver 13 anos, a mais nova terá pelo menos $2^3=8$ anos e haverá pelo menos mais uma irmã com idade inferior a 8 ou superior a 13, o que não é possível.

   Se a mais velha tiver $2^4=16$ anos, a mais nova terá pelo menos $2^3=8$ anos. Na verdade, tal só é possível se a irmã mais nova tiver exactamente 8 anos e existir outra irmã com 13 anos.

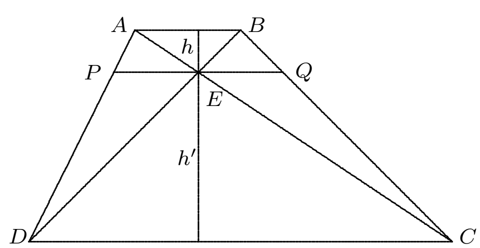
   Se a irmã mais velha tiver $2\times 13=26$ anos, a mais nova terá pelo menos 13 anos, o que não é possível.

   Se a irmã mais velha tiver $2^5=32$ anos, a mais nova terá pelo menos 16 anos, o que também não é possível.

   Portanto, o Senhor Jaime tem 3 filhas com 8, 13 e 16 anos.

   Opção correcta: B).

2. Sejam h e h' as alturas dos triângulos $[ABE]$ e $[CDE]$ relativamente aos lados $[AB]$ e $[DC]$, respectivamente.



Como os triângulos $[AEB]$ e $[CED]$ são semelhantes, tem-se $\dfrac{h'}{h}=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{AB}}=3$, ou seja, $h'=3h$.

A área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2} \times (h+h') = 4\,(h+h') = 16\,h$.

Por outro lado, esta área é a soma das áreas dos trapézios $[ABQP]$ e $[PQCD]$, ou seja,

$$16h = \frac{\overline{AB}+\overline{PQ}}{2} \times h + \frac{\overline{CD}+\overline{PQ}}{2} \times h' = h + 3h' + (h+h')\,\frac{\overline{PQ}}{2} = 10h + 4h\,\frac{\overline{PQ}}{2}.$$

Portanto, $\overline{PQ} = \dfrac{(16-10)\times 2}{4} = 3$ cm.

3. Observe-se que o colar verifica as três propriedades seguintes.

   (a) O colar não tem duas pérolas vermelhas lado a lado.

   Se o colar tivesse duas pérolas vermelhas lado a lado, então seria possível separar essas duas pérolas das outras. O colar ficaria assim separado em duas partes, tendo cada uma dessas partes o mesmo número de pérolas azuis e de pérolas brancas.

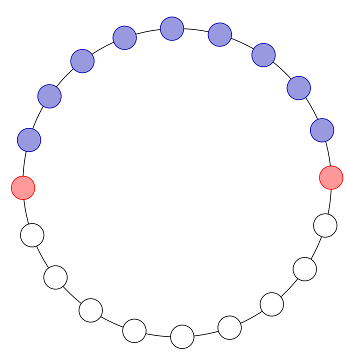
   (b) O colar não tem uma pérola azul e uma pérola branca lado a lado.

   Se tivesse, então bastaria separar essas duas pérolas das outras para separar o colar em duas partes, tendo cada uma delas o mesmo número de pérolas azuis e de pérolas brancas.

   (c) O número de pérolas vermelhas não pode ser zero porque nesse caso existiria uma pérola azul ao lado de uma pérola branca.

Uma vez que o número de pérolas vermelhas é par, o colar tem pelo menos duas pérolas vermelhas. Além disso, entre duas pérolas vermelhas consecutivas só há pérolas da mesma cor.

Pelo menos uma das pérolas vermelhas tem uma sucessão de pérolas azuis de um lado e uma sucessão de pérolas brancas do outro. Suponha-se que o comprimento da sucessão de pérolas azuis é menor ou igual do que o da sucessão de pérolas brancas. Deste modo, existe no colar uma sucessão de pérolas do tipo $V\,\underbrace{AA...A}_{n}\,V\,\underbrace{B...BB}_{n}$, com tantas pérolas azuis como brancas. Logo, o resto do colar também tem um número igual de pérolas azuis e brancas e, por isso, esta sucessão tem de ser a totalidade do colar. Assim, o colar tem duas pérolas vermelhas, nove azuis e nove brancas.



Resta verificar que este colar está nas condições do enunciado. Corte-se o colar em duas partes com um número par de pérolas cada uma. Se uma das partes não tiver pérolas vermelhas, então só tem pérolas azuis ou só tem pérolas brancas, portanto uma das partes tem mais pérolas azuis do que brancas. Se em cada uma das partes há uma pérola vermelha, então uma das partes tem mais pérolas azuis e a outra mais pérolas brancas.

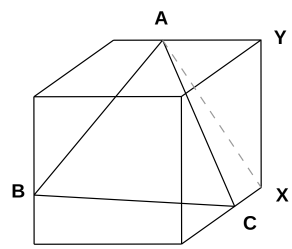
Sugestões para a resolução dos problemas

4. Seja X o número escrito pelo Afonso. Dado que X é divisível por todos os números inteiros entre 2 e 31, excepto 2 deles, que são consecutivos, tem-se que X é divisível por 2, 2^2, 2^3, 3, 3^2 e 5, podendo porventura não o ser por $2^4 = 16$, $3^3 = 27$ e $5^2 = 25$. Também são divisores de X os produtos dos divisores anteriormente indicados que são primos entre si, ou seja, $6, 10, 12, 15, 18, 20, 24$ e 30. Todos os números inteiros que estão isolados entre os divisores já indicados, ou seja, 7, 11 e 19, dividem X. Repetindo o raciocínio anterior, também são divisores de X os números 14, 21, 22 e 28 e, consequentemente, os números 13, 23 e 29. Mais uma vez, também $2 \times 13 = 26$ é divisor de X, bem como os números inteiros isolados 25 e 27. Restam apenas os números inteiros consecutivos 16 e 17.

   Logo, $X = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 = 2 \times 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 100$ e o algarismo das centenas de X é o algarismo das unidades do número $2 \times 7 \times 7 \times 3 \times 9 \times 3 \times 9$, ou seja, 2.

   Portanto, o algarismo das centenas do número escrito pelo Afonso é 2.

5.



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[AYX]$, obtém-se

$$\overline{AX}^2 = \overline{AY}^2 + \overline{YX}^2 = 6^2 + 4^2 = 52.$$

Novamente pelo Teorema de Pitágoras, desta vez aplicado ao triângulo $[AXC]$, rectângulo em X, resulta

$$\overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{XC}^2 = 2^2 + 52 = 56.$$

De modo análogo, prova-se que

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = 56.$$

Portanto, $[ABC]$ é um triângulo equilátero de lado $\sqrt{56}$. A altura deste triângulo, que se determina aplicando o Teorema de Pitágoras, é $\sqrt{42}$. Assim, a área de $[ABC]$ é $\dfrac{\sqrt{56} \times \sqrt{42}}{2} = 14\sqrt{3}$.

A área do tecido é $14\sqrt{3}$ m^2.

6. **Solução 1:** Na coluna do quadrado sombreado são cosidos os botões de ordem

$$1, 3, 7, 13, 21, 31 \ldots$$

Note-se que vale a seguinte correspondência:

botão	linha
1^o	0
3^o	1
7^o	-2
13^o	3
21^o	-4
31^o	5
$\ldots$	$\ldots$

No quadrado da coluna central e da linha $-n$, se n é par, ou da linha n, se n é ímpar, é cosido o botão de ordem

$$1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + \ldots + 2 \times n = 1 + 2(1 + 2 + \ldots + n).$$

A soma $1 + 2 + \ldots + n$ tem n parcelas. Para calcular esta soma, associa-se a primeira parcela com a última, a segunda com a penúltima, a terceira com a antepenúltima e assim sucessivamente. Assim, se n é par, então obtém-se

$$1 + 2 + \ldots + n = (1 + n) + (2 + n - 1) + \ldots + \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n}{2} \times (n + 1).$$

Se n é ímpar, então obtém-se

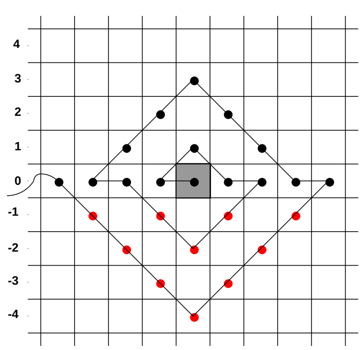
$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n &= (1 + n) + (2 + n - 1) + \ldots + \left(\frac{n+1}{2} - 1 + \frac{n+1}{2} + 1\right) + \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{n-1}{2} \times (n + 1) + \frac{n+1}{2} = \frac{n}{2} \times (n + 1). \end{aligned}$$

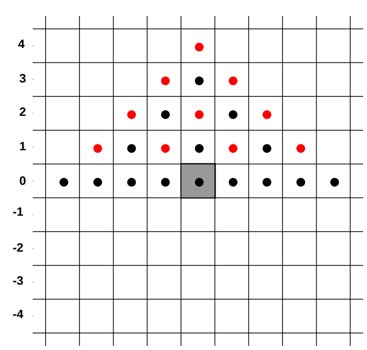
Portanto,

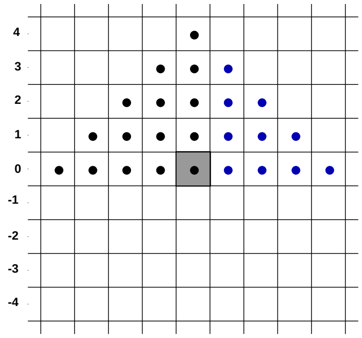
$$1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + \ldots + 2 \times n = 1 + 2(1 + 2 + \ldots + n) = 1 + 2 \times \frac{n}{2} \times (n + 1) = 1 + n + n^2.$$

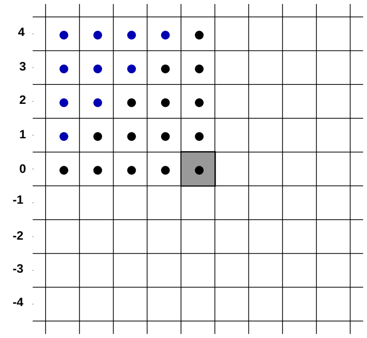
Como $1 + 44 + 44^2 = 1981 < 2007$ e $1 + 45 + 45^2 = 2071 > 2007$, então o 2007^o botão é cosido num dos quadrados que formam o percurso da fita desde a linha -44 até à linha 45. Por outro lado, $2007 = 1981 + 26$ e, portanto, depois de cosidos 1981 botões até ao quadrado que está na linha -44 e na coluna central, cosem-se os os últimos 26 botões. Logo, o último botão é cosido na linha $-44 + 26 = -18$.

Solução 2: Observe-se que nas quatro figuras seguintes o número de botões é sempre o mesmo.









Isto é geral. Se em determinado momento há n botões cosidos na coluna do quadrado sombreado e o último botão foi cosido na linha 0 mas o penúltimo não, então o número de botões já cosidos é n^2. Mais, o último botão a ser cosido está à direita ou à esquerda do quadrado sombreado e, portanto, os dois botões seguintes são cosidos nas linhas 0 e -1 ou nas linhas 0 e 1, consoante n é par ou ímpar. Uma vez que $44^2 = 1936 < 2007 < 2025 = 45^2$ e $2025 - 2007 = 18 < 45$, o 2007^o botão está 18 linhas abaixo da linha zero, isto é, na linha -18.