OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXIX OPM - 2ª Eliminatória - 19.01.2011 - Categoria B - 10º/12º

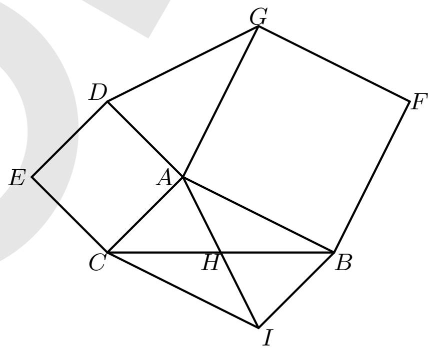
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Se P e M forem, respectivamente, a quantidade diária de leite produzida por uma vaca preta e por uma vaca malhada, então $5 \times (4P + 3M) = 4 \times (3P + 5M)$, ou seja, $20P + 15M = 12P + 20M$. Logo $M = \frac{8}{5}P > P$, ou seja, as vacas malhadas produzem mais leite do que as pretas.

2. Uma vez que $\measuredangle DAC$ e $\measuredangle GAB$ são rectos, tem-se $C\hat{A}B + D\hat{A}G = 180°$, logo

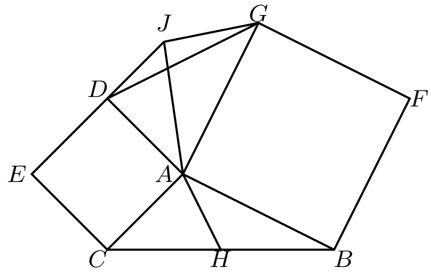
$$D\hat{A}G = 180 - C\hat{A}B.$$



Solução 1: Considere-se o ponto I tal que $[ACIB]$ é um paralelogramo. Como $[AB]$ é paralelo a $[CI]$ tem-se $I\hat{A}B = A\hat{I}C$ pelo que

$$I\hat{C}A = 180 - (C\hat{A}I + A\hat{I}C) = 180 - (C\hat{A}I + I\hat{A}B) = 180 - C\hat{A}B = D\hat{A}G.$$

Por outro lado, $\overline{AC} = \overline{AD}$ e $\overline{CI} = \overline{AB} = \overline{AG}$, logo os triângulos $[ACI]$ e $[DAG]$ são congruentes. Portanto, tem-se também a igualdade $\overline{DG} = \overline{AI}$. Por fim, como os segmentos $[AI]$ e $[CB]$ são as diagonais de um paralelogramo, elas intersectam-se no seu ponto médio. Assim, $\overline{AI} = 2\overline{AH}$ e conclui-se que $\overline{DG} = 2\overline{AH}$.



Solução 2: Usando os ângulos internos do triângulo $[ABC]$ obtém-se $D\hat{A}G = A\hat{C}B + C\hat{B}A$. Considere-se o ponto J tal que a semi-recta AJ intersecta $[DG]$, $D\hat{A}J = A\hat{C}B$ e $\overline{AJ} = \overline{CH}$.
Os triângulos $[DAJ]$ e $[ACH]$ são congruentes porque $\overline{AC} = \overline{AD}$, $A\hat{C}H = D\hat{A}J$ e $\overline{CH} = \overline{AJ}$. Logo $A\hat{J}D = C\hat{H}A$ e $\overline{DJ} = \overline{AH}$.
Analogamente, os triângulos $[HBA]$ e $[JAG]$ são congruentes, logo $G\hat{J}A = A\hat{H}B$ e $\overline{JG} = \overline{AH}$.
Assim, $G\hat{J}D = G\hat{J}A + A\hat{J}D = A\hat{H}B + C\hat{H}A = 180°$, pelo que o ponto J pertence a $[DG]$ e $\overline{DJ} = \overline{JG}$. Logo $\overline{DG} = 2\overline{AH}$.

3. Dado um número natural n, seja $S(n)$ a soma dos seus algarismos. Sejam N e $N + 1$ os dois menores números certeiros consecutivos. Como $S(N)$ e $S(N + 1)$ são múltiplos de 2011, então $S(N) - S(N + 1)$ é também um múltiplo de 2011. Assim, o algarismo das unidades de N é 9, pois caso contrário $S(N) - S(N + 1) = -1$.

Suponha-se então que N e $N + 1$ se escrevem na forma

$$N = A\underbrace{9\ldots9}_{k}, \qquad N+1 = (A+1)\underbrace{0\ldots0}_{k}$$

onde A é um número que não termina em 9.

Como $N + 1$ é um número certeiro então $S(A + 1)$ é múltiplo de 2011. Se A é o menor número que verifica as condições anteriores, então $S(A) = 2010$. Como os algarismos mais à direita devem ser os maiores possíveis, então $A = 4\underbrace{9\ldots9}_{222}8$.

Como $S(N) = S(A) + 9k = 2010 + 9k$ é um múltiplo de 2011, então $9k + 2010 = 2011u$, ou seja, $2011u - 2010$ é múltiplo de 9. O menor número natural u que verifica esta condição é $u = 3$, pelo que $k = 447$. Logo

$$N = 4\underbrace{9\ldots9}_{222}8\underbrace{9\ldots9}_{447}, \qquad N+1 = 4\underbrace{9\ldots9}_{223}\underbrace{0\ldots0}_{447}.$$

4. Seja $S_n = \{-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$.

O único subconjunto com 3 elementos de S_1 é $\{-1, 0, 1\}$ e tem-se $-1+1=0$, o que prova o pretendido para $n=1$.

Suponha-se que o resultado é válido para n e considere-se um conjunto $A \subset S_{n+1}$ com $n+3$ elementos.

Se A contém pelo menos $n+2$ elementos de S_n então existem três elementos $a, b, c \in A$ tais que $a+b=c$.

Se A apenas contém $n+1$ elementos de S_n, então $\{-n-1, n+1\} \subset A$. Se $0 \in A$, então o resultado é válido, uma vez que $(-n-1)+(n+1)=0$. Suponha-se então que A contém $n+1$ elementos de $\{-n, -n+1, \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, n-1, n\}$.

Se n é par, então A contém pelo menos um dos n conjuntos $\{-n, -1\}, \{-n+1, -2\}, \ldots, \{-\frac{n}{2}-1, -\frac{n}{2}\}$, $\{1, n\}, \{2, n-1\}, \ldots, \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\}$ e assim A tem dois elementos cuja soma pertence a A.

Se n é ímpar e A contém pelo menos um dos $n-1$ conjuntos $\{-n, -1\}, \{-n+1, -2\}, \ldots, \{-\frac{n+3}{2}, -\frac{n-1}{2}\}$, $\{1, n\}, \{2, n-1\}, \ldots, \{\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}\}$, então A tem dois elementos cuja soma pertence a A. Caso contrário, então A contém o conjunto $\{-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\}$, logo o resultado é válido, uma vez que $-\frac{n+1}{2}+(n+1)=\frac{n+1}{2}$.