Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXIV OPM - Final - 1º dia - 31.03.2006 - Categoria A

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Como $154 = 2 \times 7 \times 11$, o fundo do lago tem, em número de azulejos, as possíveis dimensões: 1×154, 2×77, 7×22 e 11×14. Por outro lado, o perímetro do lago divide 650. Ora $2 \times (11 + 14) = 50$ divide 650 e $2 \times (1 + 154) = 310$, $2 \times (2 + 77) = 158$ e $2 \times (7 + 22) = 58$ não são divisores de 650. Logo, o lago tem 11 azulejos de largura, 14 de comprimento e $\frac{650}{50} = 13$ de profundidade.

   Opção correcta: B).

   (b) Visto que o lago demora 16 horas a esvaziar, numa hora esvazia $\frac{1}{16}$ da sua capacidade. De modo análogo, como demora 12 horas a encher, numa hora enche $\frac{1}{12}$ da sua capacidade. Assim, numa hora o jardineiro consegue encher de água $\frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$ da capacidade do lago, pelo que demora 48 horas a encher o lago.

   Portanto, o lago ficará cheio às 9 horas do dia 1 de Abril.

   Opção correcta: D).

   (c) Se o algarismo que falta for diferente dos 4 indicados, há 6 possibilidades para a sua escolha. O número de sequências de 5 algarismos distintos é $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$. Logo, o número de códigos com 5 algarismos distintos é $6 \times 120 = 720$.

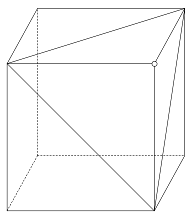
   Se o algarismo que falta for igual a um dos 4 indicados, há 4 possibilidades para a sua escolha. O número de sequências de 5 algarismos em que exactamente dois deles são iguais é $5 \times 4 \times 3 = 60$. Logo, o número de códigos nestas condições é $4 \times 60 = 240$.

   Portanto, o o número total de códigos é $720 + 240 = 960$.

   Opção correcta: D).

   (d) Para que um triângulo formado com vértices de um cubo seja equilátero os seus lados têm de ser diagonais das faces do cubo.

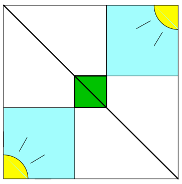
   Solução 1: Cada um dos triângulos equiláteros é base de uma pirâmide triangular cujo vértice é um dos vértices do cubo e a cada vértice do cubo corresponde um triângulo equilátero nas condições indicadas. Assim, o número de triângulos equiláteros é exactamente igual ao número de vértices do cubo, ou seja, 8.



   Solução 2: Há 3 diagonais a sair de cada vértice do cubo e quaisquer duas dessas 3 diagonais definem um triângulo equilátero. Assim, cada um dos vértices do cubo é vértice de 3 triângulos equiláteros distintos. Como o cubo tem 8 vértices, contam-se 8×3 triângulos equiláteros. No entanto, note-se que neste processo de contagem cada triângulo é contado 3 vezes, porque é contado para cada um dos seus vértices. Assim, há exactamente $\frac{8 \times 3}{3} = 8$ triângulos equiláteros.

   Opção correcta: B).

2. **Solução 1:** Considere-se apenas a metade superior da moldura e faça-se o corte e a colagem indicados na figura. A área do quadrado obtido é 50 dm^2 e portanto o seu lado mede $5\sqrt{2}$ dm. Como a área do quadrado verde é 2 dm^2 então o comprimento do seu lado é $\sqrt{2}$ dm. Logo, cada quadrado que é parte da aguarela tem $\dfrac{5\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ dm de lado. Consequentemente, a área de cada um desses quadrados é $(2\sqrt{2})^2 = 8$ dm^2 e a área da aguarela é $4 \times 8 = 32$ dm^2.



Solução 2: Sejam ℓ o comprimento do lado da aguarela e d o comprimento da diagonal da aguarela. Pelo Teorema de Pitágoras tem-se $d = \sqrt{2}\,\ell$. Como a moldura tem 10 dm de lado a altura de cada triângulo rectângulo verde, relativamente à hipotenusa, mede $\dfrac{10}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ell$ dm. Logo, a área de cada triângulo verde é $\dfrac{1}{4}(10-\sqrt{2}\ell)^2$ dm^2. Assim, $(10-\sqrt{2}\ell)^2 = 4$. Uma vez que $10-\sqrt{2}\ell > 0$, tem-se $\ell = 4\sqrt{2}$. Consequentemente, $\ell^2 = 32$ e a área da aguarela é 32 dm^2.

3. O Alexandre andou mais $45 - 30 = 15$ metros do que o Herculano e, no período de tempo que o Alexandre demorou a percorrer esses 15 metros, o comboio andou $45 + 30 = 75$ metros. Portanto, no mesmo período de tempo, o comboio percorre $75/15 = 5$ vezes mais metros do que cada um dos rapazes. Assim, enquanto o Herculano andou 30 metros, o comboio andou $30 \times 5 = 150$ metros. Como o Herculano começou a andar quando foi passado pela frente do comboio, parou quando se cruzou com o fim do comboio e andou 30 metros no sentido oposto, então o comboio tem $150 + 30 = 180$ metros de comprimento.