Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXIII OPM - Final - 2º dia - 19.03.2005 - Categoria B

http://www.spm.pt/~opm

Duração: 3 horas

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Todo o número da forma $6k$, com $k > 1$, é abundante porque é, pelo menos, divisível por 1, k, $2k$, $3k$ e $6k$, cuja soma é maior do que $12k$.

   Se $n > 46$ e n é múltiplo de 6, então $n = 12 + (n - 12)$, e as parcelas 12 e $n - 12$ são múltiplas de 6 e maiores do que 6, logo abundantes.

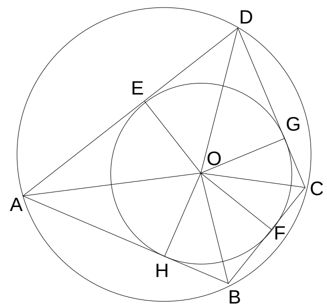
   Como só se consideram números pares, interessa encontrar dois números abundantes menores do que 46 cujo resto da divisão por 6 seja 2 e 4.

   Ora, 20 é abundante $(1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42 > 40)$ e o resto da sua divisão por 6 é 2. Como 20 é abundante, também 40 é abundante e o resto da sua divisão por 6 é 4.

   Assim, se $n > 46$ e o resto da divisão de n por 6 é 2, então $n = 20 + (n - 20)$, que é a soma de dois números abundantes já que $n - 20$ é múltiplo de 6 e maior do que 6.

   Por fim, se $n > 46$ e o resto da sua divisão por 6 é 4, então $n = 40 + (n - 40)$, que é a soma de dois números abundantes porque $n - 40$ é múltiplo de 6 e maior do que 6.

5. Designe-se por O o centro do círculo inscrito e por G e H os pontos em que o círculo inscrito toca nos lados $[CD]$ e $[AB]$, respectivamente.



Como os triângulos rectângulos $[EAO]$ e $[HAO]$ são congruentes, tem-se

$$E\hat{A}O = \frac{1}{2}D\hat{A}B = \frac{1}{4}BCD = \frac{1}{4}(360^o - DAB) = 90^o - \frac{1}{2}B\hat{C}D.$$

Mas os triângulos rectângulos $[OFC]$ e $[OGC]$ também são congruentes, logo $F\hat{C}O = \frac{1}{2}B\hat{C}D$ e $E\hat{A}O = 90^o - F\hat{C}O = C\hat{O}F$. Assim, os triângulos rectângulos $[EAO]$ e $[FOC]$ são semelhantes, logo $\frac{\overline{FC}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{AE}}$ e, deste modo, $\overline{FC} \times \overline{AE} = \overline{OF} \times \overline{OE}$.

Seguindo um raciocínio análogo conclui-se que os triângulos rectângulos $[BFO]$ e $[OED]$ são semelhantes e que $\overline{BF} \times \overline{ED} = \overline{OF} \times \overline{OE}$.

Portanto, $\overline{AE} \times \overline{FC} = \overline{BF} \times \overline{ED}$.

6. Observe-se que a função que a cada $n \in \mathbb{N}$ faz corresponder 1 verifica a condição exigida no enunciado. Seja f uma função, de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, que verifica $f(a+b)f(a-b) = f(a^2)$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a > b$.

Solução 1: Considere-se $k \in \mathbb{N}$, qualquer, e seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq k+2$. Então

$$f(m^2) = f(m-(m-k))\ f(m+(m-k)) = f(k)\ f(2m-k)$$

e $f((m+1)^2) = f((m+1)-(m-k-1))\ f((m+1)+(m-k-1)) = f(k+2)\ f(2m-k)\,.$

Assim, para todo o $k, m \in \mathbb{N}$, com $m \geq k+2$,

$$\frac{f(k+2)}{f(k)} = \frac{f((m+1)^2)}{f(m^2)}.$$

Portanto, $\frac{f((m+1)^2)}{f(m^2)} = \frac{f(3)}{f(1)}$, para $m \geq 3$ e $f(n+2) = \frac{f(3)}{f(1)} f(n)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Da última igualdade resulta que

$$f(n) = \begin{cases} \left(\dfrac{f(3)}{f(1)}\right)^{\frac{n-1}{2}} f(1) & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \left(\dfrac{f(3)}{f(1)}\right)^{\frac{n-2}{2}} f(2) & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Assim, tem-se $\frac{f(25)}{f(9)} = \left(\frac{f(3)}{f(1)}\right)^8$.

Por outro lado, $\frac{f(25)}{f(9)} = \frac{f(5^2)}{f(4^2)}\frac{f(4^2)}{f(3^2)} = \left(\frac{f(3)}{f(1)}\right)^2$. Então $f(3) = f(1)$ e $f(n) = \begin{cases} f(1) & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(2) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$. Mas, de $\frac{f(16)}{f(9)} = \frac{f(4^2)}{f(3^2)} = \frac{f(3)}{f(1)} = 1$, resulta que $f(16) = f(9)$ e portanto f é constante. Seja $c \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = c$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Então, $c^2 = f(1)f(3) = f(4) = c$, deduzindo-se que $c = 1$.

Solução 2: Para $m \geq 3$ tem-se

$$f(m-(m-1))\ f(m+(m-1)) = f(m-(m-2))\ f(m+(m-2)),$$

ou seja, $f(1)\ f(2m-1) = f(2)\ f(2m-2)$. Assim, para $k \geq 5$, ímpar, $f(1)f(k) = f(2)f(k-1)$.

Para $m \geq 4$ tem-se

$$f(m-(m-2))\ f(m+(m-2)) = f(m-(m-3))\ f(m+(m-3)),$$

isto é, $f(2)\ f(2m-2) = f(3)\ f(2m-3)$, concluindo-se que, para $k \geq 6$, par, $f(2)f(k) = f(3)f(k-1)$. Então, para $k \geq 5$,

$$f(k) = \begin{cases} \dfrac{f(2)}{f(1)}\, f(k-1) & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \dfrac{f(3)}{f(2)}\, f(k-1) & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases}$$

Atendendo a que $f(4) = f(1)f(3)$ obtém-se que, para $k \geq 3$,

$$f(2k-1) = \frac{f(2)}{f(1)} f(2k-2) = \cdots = \underbrace{\frac{f(2)}{f(1)}\frac{f(3)}{f(2)}\cdots\frac{f(3)}{f(2)}\frac{f(2)}{f(1)}}_{2k-5 \text{ factores}} f(4) = f(2)\frac{f(3)^{k-2}}{f(1)^{k-3}}\,.$$

Então, também para $k \geq 3$,

$$f(2k) = \frac{f(3)}{f(2)} f(2k-1) = \frac{f(3)^{k-1}}{f(1)^{k-3}}\,.$$

Assim, para $n \geq 5$,

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{f(3)^{\frac{n-3}{2}}}{f(1)^{\frac{n-5}{2}}} f(2) & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{f(3)^{\frac{n-2}{2}}}{f(1)^{\frac{n-6}{2}}} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Da igualdade anterior obtém-se que $f(5) = f(3)f(2)$ e $f(9) = \frac{f(3)^3}{f(1)^2} f(2)$.

Por outro lado, $f(9) = f(3^2) = f(3-2)f(3+2) = f(1)f(5)$. Então $f(3)^2 = f(1)^3$ e $f(1)$ é um quadrado perfeito. Suponha-se que $f(1) = d^2$, com $d \in \mathbb{N}$. Então $f(3) = d^3$ e, de $f(16) = f(3)f(5) = d^6 f(2)$ e $f(16) = \frac{f(3)^7}{f(1)^5} = d^{11}$, conclui-se que $f(2) = d^5$. Além disso, $f(4) = f(1)f(3) = d^5$ e, para $n \geq 5$,

$$f(n) = \begin{cases} d^{\frac{n+11}{2}} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ d^{\frac{n+6}{2}} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Por outro lado, $f(25) = f(4)f(6)$, ou seja, $d^{18} = d^5 d^6$, concluindo-se que $d = 1$.

Provou-se assim que existe uma única função, de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, que verifica a condição do enunciado, a função definida por $f(n) = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.