

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXIII OPM - Final - 2º dia - 19.03.2005 - Categoria B

<http://www.spm.pt/~opm>

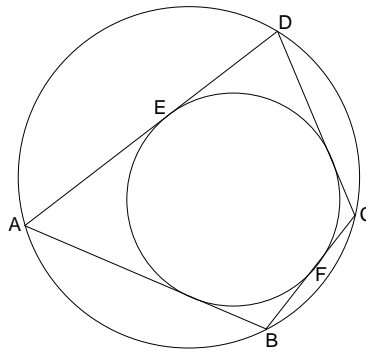
Duração: 3 horas

Cada questão vale 10 pontos

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.*

4. Um número natural n diz-se abundante se a soma dos seus divisores for maior do que $2n$. Por exemplo, 18 é abundante porque a soma dos seus divisores, $1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18$, é maior do que 36. Escreve todo o número par maior do que 46 como soma de dois números abundantes.
5. Considera um quadrilátero $[ABCD]$ que possui um círculo inscrito e um círculo circunscrito. Os lados $[AD]$ e $[BC]$ são tangentes ao círculo inscrito nos pontos E e F , respectivamente. Mostra que

$$\overline{AE} \times \overline{FC} = \overline{BF} \times \overline{ED}.$$



6. Mostra que existe uma única função f , de \mathbb{N} em \mathbb{N} , que verifica $f(a + b)f(a - b) = f(a^2)$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a > b$.