Olimpíadas Portuguesas
de Matemática

http://www.spm.pt/∼opm

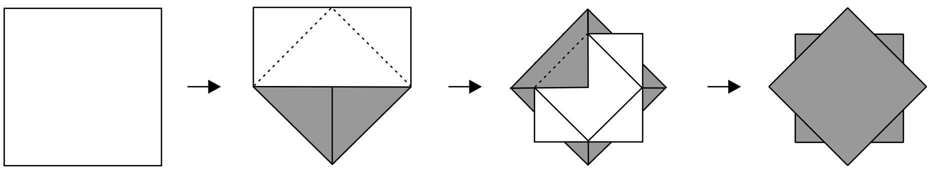
XXII OPM - 2ª Eliminatória - 21.01.2004 - Categoria A - 8º/9º

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Num treino de preparação para agentes policiais simula-se uma perseguição: dois carros da polícia e dois carros conduzidos por dois ladrões saem simultaneamente do mesmo ponto de uma pista circular. O ladrão A conduz o seu carro num dos sentidos da pista, perseguido pelo polícia B, e o polícia C conduz o seu carro no sentido inverso, atrás do ladrão D. Todos conduzem a velocidades diferentes, mas constantes. Cinco minutos após o início da perseguição, o polícia C cruza-se com o ladrão A e o polícia B cruza-se com o ladrão D. Ao fim de 41 minutos de perseguição, o ladrão A surpreende o polícia B, ultrapassando-o pela primeira vez. Ao fim de quanto tempo o ladrão D ultrapassa o polícia C pela primeira vez? Solução

2. No Natal a Tina fez uma estrela com uma folha de papel de lustro dourado, recortando um quadrado com 2 dm^2 de área e dobrando-o segundo o esquema indicado. A estrela obtida tem os lados todos iguais. Qual é o seu perímetro?



Solução

3. No planeta Produtivix, este ano tem 2004 dias numerados de 1 a 2004 e está dividido em semanas de 7 dias: $2^{\underline{a}}$ vix, $3^{\underline{a}}$ vix, $\ldots$, $6^{\underline{a}}$ vix, Sábavix e Dominvix. Os únicos dias considerados feriados, em que os habitantes de Produtivix não trabalham, são os Dominvix que terminam em 7. Quantos feriados há este ano no planeta Produtivix, se o dia 1 é uma $5^{\underline{a}}$ vix? Solução

4. A Joana gosta muito de números ímpares e escreveu, em cada linha do seu caderno, um número ímpar de números ímpares da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 15 & 17 \\ 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 \\ & & & \cdots \end{array}$$

Numa linha a Joana escreveu 55 números ímpares. Qual é a soma de todos os números escritos nessa linha?

Solução

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/∼opm

XXII OPM - 2ª Eliminatória - 21.01.2004 - Categoria A - 8°/9°

Cada questão vale 10 pontos

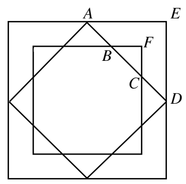
Sugestões para a resolução dos problemas

1. Ao fim de 5 minutos de perseguição, o avanço do ladrão A relativamente ao polícia B é exactamente igual ao avanço do ladrão D relativamente ao polícia C. Assim, o ladrão D demora, para atingir uma certa distância do polícia C, o mesmo tempo que o ladrão A precisa para atingir a mesma distância do polícia B. Quando o ladrão A ultrapassa o polícia B pela primeira vez tem exactamente uma volta à pista de avanço sobre ele, o mesmo acontecendo ao ladrão D relativamente ao polícia C no momento em que o ultrapassa. Como o ladrão A ultrapassa o polícia B ao fim de 41 minutos de perseguição, o ladrão D também ultrapassa o polícia C ao fim de 41 minutos de perseguição.

Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

2. Como a área do quadrado é 2, tem-se $\overline{AE} = \overline{ED} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[AED]$, obtém-se $\overline{AD} = 1$. Novamente por aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[BFC]$, e dado que $\overline{BF} = \overline{FC}$, tem-se $\overline{BC} = \sqrt{2}\ \overline{BF}$. Assim, $(2+\sqrt{2})\overline{BF} = 1$, ou seja, $\overline{BF} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$. Portanto, o perímetro da estrela é $\frac{16}{2+\sqrt{2}} = 8(2-\sqrt{2})$ dm.



Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

3. **Solução1:**Se o dia 1 é uma $5^{\underline{a}}$ vix então o primeiro Dominvix é dia 4 e os restantes Dominvix são dias do tipo $4+7k,\ k \in \{1,2,3,\ldots,\lfloor\frac{2004-4}{7}\rfloor = 285\}$. Para encontrar um Dominvix que termine em 7, basta encontrar um valor de k tal que $7k$ termine em 3, o que só acontece quando k termina em 9. Como entre 1 e 285 há 28 números que terminam em 9, este ano há 28 feriados no planeta Produtivix.

   Solução 2: Se o dia 1 é uma $5^{\underline{a}}$ vix então o primeiro Dominvix é dia 4 e os restantes Dominvix obtêm-se somando a 4 múltiplos de 7. Assim, o primeiro Dominvix que termina em 7 é $4+63=67$. Uma vez que o primeiro múltiplo de 7 que termina em 0 é 70, a partir do Dominvix dia 67 só há um Dominvix que termina em 7 de 70 em 70 dias. Como $\lfloor\frac{2004-67}{70}\rfloor = 27$, conclui-se que há mais 27 feriados no planeta Produtivix este ano. Portanto, este ano há 28 feriados no planeta Produtivix.

   Nota: Representa-se por $\lfloor x\rfloor$ o maior inteiro que é menor ou igual a x (exemplos: $\lfloor 2\rfloor = 2$, $\lfloor 3.7\rfloor = 3$).

Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Antes de escrever a linha com 55 números ímpares a Joana escreveu $1+3+5+\ldots+51+53$ números ímpares. A soma

$$1+3+5+\ldots+51+53$$

tem 27 parcelas e, associando a primeira parcela com a última, a segunda com a penúltima, a terceira com a antepenúltima, e assim sucessivamente, obtém-se

$$\begin{aligned}1+3+5+\ldots+51+53 &= (1+53)+(3+51)+(5+49)+\ldots+(25+29)+27\\ &= 13\times 54+27\\ &= 729.\end{aligned}$$

O último número ímpar que a Joana escreveu, antes de iniciar a linha com 55 números ímpares, foi $729\times 2-1 = 1457$. Assim, essa linha começa com o número 1459 e termina com o número $1459+54\times 2 = 1567$. Logo, a soma pretendida é $1459+1461+\ldots+1565+1567$ e, associando as parcelas como anteriormente, obtém-se

$$\begin{aligned}&1459+1461+\ldots+1565+1567=\\ &\quad=(1459+1567)+(1461+1565)+\ldots+(1509+1517)+(1511+1515)+1513\\ &\quad=27\times 3026+1513\\ &\quad=83215.\end{aligned}$$

Portanto, a soma dos 55 números ímpares é 83215.

Enunciado da Prova