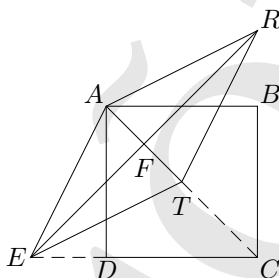


Sugestões para a resolução dos problemas

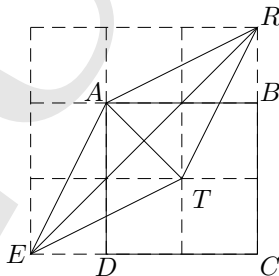
4. A área do losango  $[ARTE]$  é igual a  $\frac{\overline{ER} \times \overline{AT}}{2}$ . Uma vez que  $[AC]$  é uma diagonal do quadrado, pelo teorema de Pitágoras,  $\overline{AT} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{2}$  cm.

**Solução 1:** Seja  $F$  o ponto de interseção das diagonais do losango (também ponto médio de  $[AT]$ ).



As diagonais do losango intersectam-se perpendicularmente, logo o triângulo  $[EFC]$  é retângulo em  $F$  e é isósceles uma vez que  $F\hat{C}E = 45^\circ$ . Portanto,  $\overline{FE} = \overline{FC} = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  e  $\overline{ER} = 2\overline{FE} = 3\sqrt{2}$ . A área do losango é igual a  $\frac{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 3 \text{ cm}^2$ .

**Solução 2:** Ao colocar a figura num quadriculado de lado 1 cm, observa-se que as diagonais do losango seguem as diagonais do quadriculado.



Conclui-se assim que  $\overline{ED} = 1$  e  $\overline{ER} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ . A área do losango é igual a  $\frac{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 3 \text{ cm}^2$ .

5. Seja  $n$  um número feirense e seja  $H$  um conjunto de inteiros com a propriedade do enunciado. Se  $H$  tem apenas dois elementos, então só há uma diferença positiva entre eles, pelo que  $n$  só tem um divisor positivo inferior a  $n$ , e portanto  $n$  é primo.

Suponha-se agora que  $H$  tem pelo menos três elementos. Então  $H$  contém dois elementos pares ou dois elementos ímpares, e a diferença entre esses dois elementos é par. Assim,  $n$  tem um divisor par, pelo que  $n$  é par. O maior divisor positivo de  $n$  inferior a  $n$  é, portanto,  $\frac{n}{2}$ . Note-se que, se subtrairmos a todos os elementos de  $H$  o menor elemento de  $H$ , as diferenças entre elementos de  $H$  não mudam, pelo que podemos supor que o menor elemento de  $H$  é igual a 0; assim, o maior elemento de  $H$  é igual a  $\frac{n}{2}$ .

Os elementos de  $H$  diferentes de 0 são divisores positivos de  $n$  inferiores a  $n$ . Suponha-se que um deles,  $b$ , é diferente de  $\frac{n}{2}$ ,  $\frac{n}{3}$  e  $\frac{n}{4}$ . Então, como  $b$  é um divisor positivo de  $n$  inferior a  $n$ , tem-se  $b < \frac{n}{4}$ . Portanto  $\frac{n}{2} - b > \frac{n}{4}$ . Como  $\frac{n}{2} - b$  é um divisor positivo de  $n$  inferior a  $n$ , e é menor do que  $\frac{n}{2}$ , conclui-se que  $\frac{n}{2} - b = \frac{n}{3}$ , pelo que  $b = \frac{n}{6}$ . Conclui-se assim que

$$H \subseteq \left\{0, \frac{n}{6}, \frac{n}{4}, \frac{n}{3}, \frac{n}{2}\right\}.$$

As diferenças positivas entre dois dos números  $0, \frac{n}{6}, \frac{n}{4}, \frac{n}{3}, \frac{n}{2}$  são todas elementos do conjunto

$$\left\{\frac{n}{12}, \frac{n}{6}, \frac{n}{4}, \frac{n}{3}, \frac{n}{2}\right\}$$

e, como 1 é um divisor positivo de  $n$  inferior a  $n$ , um destes números tem de ser igual a 1; logo conclui-se que, se  $n$  não for primo, se tem  $n \in \{4, 6, 12\}$ .

Resta verificar que para  $n$  primo e para  $n \in \{4, 6, 12\}$  existe um conjunto  $H$  com a propriedade do enunciado:

- Se  $n$  é primo, considere-se  $H = \{0, 1\}$ ;
- Se  $n = 4$ , considere-se  $H = \{0, 1, 2\}$ ;
- Se  $n = 6$ , considere-se  $H = \{0, 2, 3\}$ ;
- Se  $n = 12$ , considere-se  $H = \{0, 2, 3, 6\}$ .

6. Se o baralho tiver apenas duas cartas, o jogo termina logo na primeira jogada. Vamos então supor que o baralho tem pelo menos três cartas.

Representemos cada distribuição possível das cartas pelos dois montes por um ponto. Dois pontos  $A$  e  $B$  são ligados por uma seta de  $A$  para  $B$  se, numa jogada, for possível passar da distribuição  $A$  para a distribuição  $B$ .

Se ambos os montes têm mais de uma carta, o ponto respetivo tem duas setas a sair, porque a Maria pode escolher como coloca as cartas em confronto de duas formas. Também tem duas setas a entrar, porque essa distribuição pode ser sido originada pelo confronto das duas cartas de baixo de um monte ou do outro e, em cada caso, há uma única distribuição possível (a carta mais forte mantém-se no mesmo monte e a outra muda de monte). Se um dos montes tem uma única carta, há igualmente duas setas a sair, mas apenas uma a entrar, porque o confronto anterior está determinado. Se um dos montes não tem cartas, o jogo já terminou, logo não tem setas a sair, mas tem uma seta a entrar. Designemos estes pontos como sendo respetivamente do tipo X, tipo Y e tipo I.



Montes com mais de uma carta



Um monte com uma carta



Um monte sem cartas

Seja  $A$  formado pelo ponto inicial da Maria, todos os pontos a que a Maria pode chegar e as respectivas setas de saída. Suponhamos que em  $A$  não se encontra nenhum ponto do tipo I. Então, em  $A$ , todos os pontos têm duas setas a sair e no máximo duas setas a entrar. Como cada seta tem uma entrada e uma saída, o número total de entradas e saídas em  $A$  é igual. Portanto, todos os pontos de  $A$  têm também duas setas a entrar, ou seja, são do tipo X. Além disso, os pontos cujas setas vão até um ponto de  $A$  também estão em  $A$ .

Se ambos os montes da configuração inicial  $P$  da Maria têm mais de uma carta, então o monte menor de um dos pontos cuja seta vai até  $P$  (que está em  $A$ ) tem menos uma carta do que o monte menor de  $P$ . Repetindo este raciocínio, chegamos a uma configuração de  $A$  onde o monte menor tem apenas uma carta. Mas esta configuração é do tipo Y, o que é impossível.

Portanto em  $A$  existe algum ponto do tipo I, ou seja, é possível a Maria resolver o desafio.

*Nota: A representação descrita depende da tabela do livro de regras. Por exemplo, se houver apenas três cartas, temos apenas duas possibilidades  $A > B > C > A$  ou  $A > B > C < A$ , que correspondem respectivamente às representações*

