XLIII OPM - Final - 1º Dia - 04.04.2025 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Uma vez que $30^8 = 3^8 \times 10^8$, o número de algarismos será igual à soma de 8 com o número de algarismos de 3^8. Mas $3^8 = 9^4 = 81^2 = 6561$, logo o número 30^8 tem $8 + 4 = 12$ algarismos.

   Opção correta: E)

   (b) Pelas hipóteses dadas, 40 baldes azuis têm a mesma capacidade que $120 - 90 = 30$ baldes vermelhos. Assim, o número de baldes azuis que necessitamos para encher o tanque será $40 \times (120 : 30) = 160$.

   Opção correta: C)

   (c) Para um número ser múltiplo de 25 os seus dois últimos algarismos têm de ser 00 ou 25 ou 50 ou 75. Os números de quatro algarismos que terminam em 00 terão de ter a soma dos outros dois algarismos igual a 9: 9000, 8100, 1800, 7200, 2700, 6300, 3600, 5400 e 4500. Os números de quatro algarismos que terminam em 25 terão de ter a soma dos outros dois algarismos igual a 2: 2025, 1125. Os números de quatro algarismos que terminam em 50 terão de ter a soma dos outros dois algarismos igual a 4: 4050, 3150, 1350 e 2250. Os números pretendidos não podem terminar em 75 porque a soma dos seus algarismos nunca seria igual a 9. Portanto há 15 números que satisfazem as duas propriedades.

   Opção correta: D)

   (d) A soma do número de movimentos para chegar ao canto superior direito com o número de movimentos para chegar ao canto superior esquerdo é 2500. Este número contém todos os movimentos feitos na horizontal, que foram 2024 (a largura de todo o tabuleiro menos a casa onde o peão se encontra) e duas vezes o número de movimentos feitos na vertical. Ou seja, a peça encontra-se a $(2500 - 2024) : 2 = 476 : 2 = 238$ casas da linha superior do tabuleiro. Deste modo, para chegar à linha inferior do tabuleiro a peça terá de se deslocar $2024 - 238$ casas, ou seja 1786 casas para baixo.

   Opção correta: D)

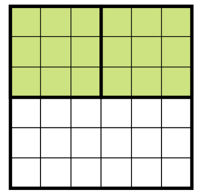
2. Como $[HAD]$ é equilátero, tem-se $H\widehat{D}A = 60°$ e como $[ABCD]$ é um quadrado, tem-se $A\widehat{D}C = 90°$, pelo que $H\widehat{D}C = 60° + 90° = 150°$. Como $\overline{DC} = \overline{DH}$, tem-se então $D\widehat{C}H = \dfrac{180° - 150°}{2} = 15°$, pelo que $H\widehat{C}B = 90° - 15° = 75°$. Tem-se, assim, $F\widehat{C}I = 180° - 75° - 60° = 45°$.

   Tem-se $E\widehat{B}F = 360° - 90° - 60° - 60° = 150°$, e, como $\overline{BF} = \overline{BE}$, isso implica $B\widehat{F}E = 15°$. Como $B\widehat{F}C = 60°$, conclui-se que $C\widehat{F}E = 75°$, e $I\widehat{F}C = 105°$.

   Conclui-se que
   $$C\widehat{I}F = 180° - F\widehat{C}I - I\widehat{F}C = 180° - 45° - 105° = 30°.$$

3. Se o Martim usar uma peça de lado 1, tem que usar duas peças de lado 2 e três peças de lado 3. Estas peças têm, no total, $1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 27 = 36$ quadrículas.

   Como um quadrado de lado 6 também tem 36 quadrículas, é necessário verificar se o Martim pode agrupar as peças de forma a construir este quadrado. A única forma de colocar as três peças de lado 3 é posicionar duas lado a lado:

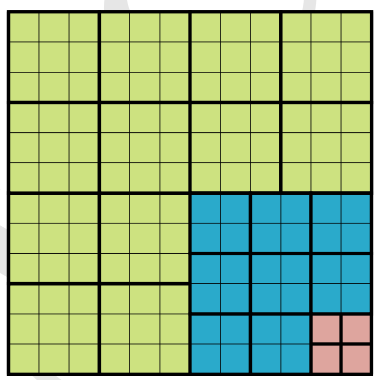


   Nas quadrículas restantes ainda é necessário colocar um quadrado de lado 3 e dois quadrados de lado 2, o que não possível porque $3 + 2 + 2 = 7$ e a largura total é 6.

   Se o Martim usar duas peças de lado 1, então as peças que tem que usar têm, no total, $36 \times 2 = 72$ quadrículas, e não há nenhum quadrado com este número de quadrículas.

   Se o Martim usar três peças de lado 1, então as peças que tem que usar têm, no total, $36 \times 3 = 108$ quadrículas, e não há nenhum quadrado com este número de quadrículas.

   Se o Martim usar quatro peças de lado 1, então as peças que tem que usar têm, no total, $36 \times 4 = 144$ quadrículas. Neste caso, o o Martim pode agrupar as quatro peças de lado 1, as oito peças de lado 2 e as 12 peças de lado 3 de forma a construir um quadrado de lado 12:



   Portanto, o lado do menor quadrado que o Martim pode construir é 12.