XL OPM - Final - 1º Dia - 08.04.2022 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Entre 1 e 99 há dez números em que o algarismo das unidades é o 2 e dez números em que o algarismo das dezenas é o 2. Para numerar as páginas até 100, o Raul precisa de usar 20 autocolantes com o algarismo 2, ficando a sobrar apenas dois autocolantes. Os próximos números com o algarismo 2 são 102, 112 e 120, e portanto a última página que o Raul consegue numerar é o 119.

   Opção correta: D).

   (b) Seja x a medida do lado $[BC]$, e consequentemente a área do retângulo $[BCFG]$, e do quadrado $[ACDE]$, é $\overline{BG} \times \overline{BC} = 2x$. Usando o Teorema de Pitágoras, obtemos que

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 2^2 + 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 + 2x\,.$$

   O lado $[BC]$ é a hipotenusa do triângulo retângulo $[ABC]$, e portanto a sua medida é maior do que $\overline{AB}$. A resposta certa é assim uma das opções: C, D ou E. Fazendo $x = \sqrt{5} + 1$, verificamos que a igualdade $x^2 = 2x + 4$ é satisfeita.

   - $x^2 = \left(\sqrt{5}+1\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 1^2 + 2\sqrt{5} = 6 + 2\sqrt{5}$
   - $4 + 2x = 4 + 2\left(\sqrt{5}+1\right) = 6 + 2\sqrt{5}$

   Opção correta: D).

   (c) Cada um dos cinco dígitos aparece um número igual de vezes como algarismo das unidades, das dezenas, das centenas e dos milhares, ou seja cada um dos dígitos é usado $\frac{120}{5} = 24$ vezes em cada uma das posições. A soma dos algarismos das unidades é portanto $24\times(1+2+3+4+5) = 24\times 15 = 360$. De igual modo a soma dos algarismos das dezenas, das centenas e dos milhares é 360, donde se conclui que a soma dos 120 números é igual a:

$$360 + 10 \times 360 + 100 \times 360 + 1000 \times 360 = 1111 \times 360 = 399960\,.$$

   Opção correta: E).

   (d) Os triângulos retângulos $[BEF]$ e $[CDF]$ são semelhantes, uma vez que os ângulos $E\widehat{F}B$ e $D\widehat{F}C$ são iguais, por serem verticalmente opostos. Como $\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{1}{3}$, pela semelhança dos triângulos $\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} = \frac{1}{3}$ e consequentemente $\overline{BF} = \frac{1}{4}\overline{BC} = 7,5$.

   A área do paralelogramo $[BFDG]$ é $\dfrac{\overline{BF} + \overline{DG}}{2} \times \overline{AB} = \dfrac{7,5 + 15}{2} \times 6 = 67,5$.

   Opção correta: B).

2. Comecemos por notar que o algarismo 9 é maior que os restantes, logo será o cume da montanha. Cada um dos restantes 8 algarismos pode estar à esquerda ou à direita do 9, logo há 2^8 possibilidades. Para cada uma delas, os algarismos ficam automaticamente ordenados, logo não há mais escolhas a fazer. Temos apenas que retirar os casos 123456789 e 987654321, que não são montanhas. Logo há $2^8 - 2 = 254$ montanhas.

3. **Solução 1:** Como os três pintores pintaram o último quarto durante 3 horas, cada um pintou o mesmo que teria pintado se cada um dos pares Alberto/Bernardo, Bernardo/César e Alberto/César tivessem pintado o quarto durante $1,5$ horas. Assim, no total pintaram $\dfrac{1,5}{5} + \dfrac{1,5}{4} + \dfrac{1,5}{10} = \dfrac{33}{40}$ do quarto. Portanto, o Alberto pintou $1 - \dfrac{33}{40} = \dfrac{7}{40}$ do quarto depois o Bernardo e o César saírem.

   Como o Bernardo e o César pintam um quarto em 4 horas, em 3 horas pintaram $\dfrac{3}{4}$ de um quarto. Logo, o Alberto pintou $1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$ do quarto. Assim, o Alberto pintou $\dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{40} = \dfrac{3}{40}$ do quarto antes o Bernardo e o César saírem.

   Como demorou 3 horas para pintar $\dfrac{3}{40}$ do quarto, conclui-se que demorou 7 horas para pintar $\dfrac{7}{40}$ do quarto.

   Solução 2: Sejam a, b e c o número de quartos que o Alberto, o Bernardo e o César pintam numa hora, respetivamente. Então tem-se

$$\begin{cases} 5a + 5b = 1 \\ 4b + 4c = 1 \\ 10a + 10c = 1 \end{cases}$$

   Portanto, pela primeira igualdade, $b = \dfrac{1}{5} - a$ e, pela terceira igualdade, $c = \dfrac{1}{10} - a$.

   Substituindo na segunda igualdade, temos $\left(\dfrac{4}{5} - 4a\right) + \left(\dfrac{4}{10} - 4a\right) = 1$, ou seja, $8a = \dfrac{2}{10}$, donde $a = \dfrac{1}{40}$.

   Deduz-se agora que $b = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{40} = \dfrac{7}{40}$ e $c = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{40} = \dfrac{3}{40}$.

   Assim, ao fim de 3 horas, os três pintores pintaram $3 \times \left(\dfrac{1}{40} + \dfrac{7}{40} + \dfrac{3}{40}\right) = \dfrac{33}{40}$ do quarto, faltando ainda pintar $1 - \dfrac{33}{40} = \dfrac{7}{40}$. Portanto, o Alberto demorou $\dfrac{\frac{7}{40}}{\frac{1}{40}} = 7$ horas a pintar o resto do quarto.