Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

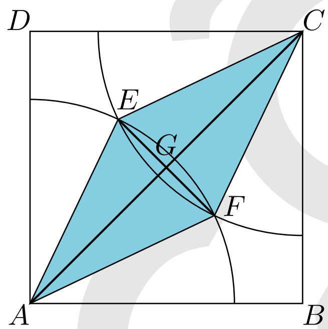
1. (a) Opção B. $(10^{10} = 2^4 \times 5^4 \times 10^6 < 5^2 \times 5^4 \times 10^6 = 50^6 = (2^2 \times 5^4)^3 < (2^2 \times 3^2 \times 6^3)^3 = (6^5)^3 = 6^{15}.)$

   (b) Opção C. ($\textit{Há } 6 \textit{ escolhas para a posição dos algarismos } 2 \textit{ e } 9^2 \textit{ escolhas para os outros algarismos.}$)

   (c) Opção D. ($\textit{Tem-se } \overline{EC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \textit{ e a área de } [AECF] \textit{ é } 12 = \overline{EC} \times \overline{GE}.$)

   (d) Opção E. ($\textit{As soluções } (x, y) \textit{ são } (2 \times 3, 2^2 \times 3^2),\ (2^6 \times 3, 3^2),\ (2 \times 3^6, 2^2),\ (2^6 \times 3^6, 1).$)

2. Uma vez que o perímetro é 48 cm, o lado do quadrado mede 12 cm. Seja G o ponto de interseção de $[AC]$ com $[EF]$. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo $[ABC]$, vem $\overline{AC}^2 = 12^2 + 12^2$, logo $\overline{AC} = 12\sqrt{2}$ cm.



Como $[AFCE]$ é um losango, então $[AC]$ e $[EF]$ são perpendiculares e intersetam-se nos seus pontos médios. Logo, tem-se $\overline{AG} = 6\sqrt{2}$ cm.

De novo pelo Teorema de Pitágoras, agora aplicado ao triângulo retângulo $[AGE]$, vem $(6\sqrt{2})^2 + \overline{EG}^2 = 9^2$, logo $\overline{EG} = 3$ cm. Então a área de $[AFCE]$ é

$$4 \times \text{área}[AGE] = 4 \times \frac{3 \times 6\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2}\text{cm}^2.$$

3. Como a soma dos 16 inteiros é par, então há um número par de parcelas ímpares.

   A soma dos primeiros 16 números pares positivos é maior do que 200, uma vez que

   $2+4+\cdots+30+32 = (2+32)+(4+30)+(6+28)+(8+26)+(10+24)+(12+22)+(14+20)+(16+18) = 34 \times 8 = 272\,.$

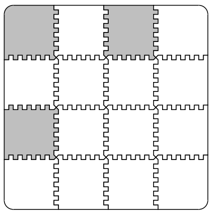
   Então há pelo menos duas parcelas ímpares. No entanto a soma dos primeiros 14 números pares positivos é igual a $272 - 32 - 30 = 210$ que ainda é maior do que 200, e portanto têm que existir pelo menos quatro parcelas ímpares.

   Finalmente basta mostrar que é possível escolher doze números pares positivos e quatro números ímpares positivos cuja soma é 200, por exemplo, da seguinte forma:

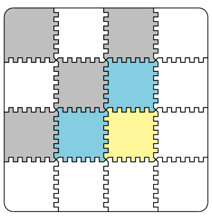
$$(2+4+6+\cdots+24) + (1+3+5+35) = 156 + 44 = 200\,.$$

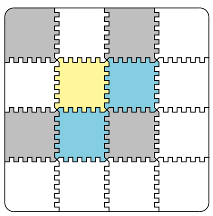
4. Como duas configurações que se podem obter uma da outra por rotação são consideradas iguais, podemos contar apenas as configurações em que o canto superior esquerdo é cinzento.

   Uma vez que há quatro peças laterais cinzentas e não pode haver duas com um lado em comum, então há uma em cada lado do tapete. Portanto qualquer configuração é da forma:

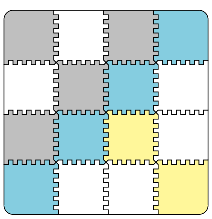
   

   A peça interior cinzenta não pode ter um lado comum com as laterais, logo só tem duas posições possíveis, que definem a posição das restantes peças interiores:

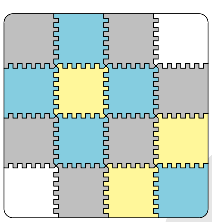
   

   - No primeiro caso, se o canto inferior direito fosse azul, as laterais com um lado em comum com esse canto seriam cinzentas e as seguintes seriam amarelas, o que impossibilitaria a colocação do canto amarelo. Portanto, o canto inferior direito é amarelo e os restantes cantos são azuis:

     Há 6 formas de escolher os lados em que vão ficar as 2 peças laterais azuis, e cada forma determina as posições das peças restantes, logo, neste caso, há 6 configurações.
   - No segundo caso, ficam definidas as posições das peças laterais e do canto inferior direito:

     O canto amarelo pode ser colocado numa das duas posições restantes, logo, neste caso, há 2 configurações.

   Assim, ao todo há 8 configurações: