XL OPM - 1ª Eliminatória - 10.11.2021 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. (*O algarismo das unidades de* 10^4 *é* 0*, o de* 11^4 *é* 1*, o de* 12^4 *é* 6 *e o de* 15^4 *é* 5.)

   (b) Opção C. (*Há* 3×3 *trajetos que passam pelo vértice central e* 2 *trajetos que não passam.*)

   (c) Opção A. (*O Bernardo escreveu os números* 102, 120, 132, 150, 210, 312 *e* 510.)

   (d) Opção B. ($10^{10} = 2^4 \times 5^4 \times 10^6 < 5^2 \times 5^4 \times 10^6 = 50^6 = (2^2 \times 5^4)^3 < (2^2 \times 3^2 \times 6^3)^3 = (6^5)^3 = 6^{15}$.)

2. **Solução 1**: Como há 30 peças, então as dimensões do tapete podem ser 1×30, 2×15, 3×10 ou 5×6. No primeiros dois casos, não haveria peças interiores; no terceiro caso, haveria apenas 8 peças interiores; no último caso, de facto, existem 12 peças interiores. Logo as dimensões do tapete são 5×6.

   Solução 2: Como há $30 - 14 - 4 = 12$ peças interiores, então as dimensões do interior podem ser 1×12, 2×6 ou 3×4. No primeiro caso, o tapete teria dimensões 3×14, ou seja, 42 peças; no segundo caso, o tapete teria dimensões 4×8, ou seja, 32 peças; no terceiro caso, de facto, o tapete tem dimensões 5×6, ou seja, 30 peças. Logo as dimensões do tapete são 5×6.

3. Como área $[CAE] = 4\times$ área $[DEC]$ e estes triângulos têm a mesma altura em relação a E, então $\overline{CA} = 4 \times \overline{CD}$.

   (Em alternativa, como área $[ADE] = 3\times$ área $[DEC]$, e estes triângulos têm a mesma base $[DE]$, então a altura de $[ADE]$ é o triplo da altura de $[DEC]$. Portanto, a altura de $[ABC]$ é o quádruplo da altura de $[DEC]$.)

   Como $[DE]$ é paralelo a $[AB]$, então $[ABC]$ é semelhante a $[DEC]$, com razão de semelhança 4.

   Portanto, área$[ABC] = 4^2\times$ área $[DEC] = 4^2 \times 2 = 32$.

   Logo área $[ABE] =$ área $[ABC]-$ área $[DEC]-$ área $[ADE] = 32 - 2 - 6 = 24$.

4. Como a soma dos onze inteiros é par, então há um número par de parcelas ímpares.

   A soma dos primeiros 11 inteiros pares positivos é maior do que 100, uma vez que

   $$2+4+6+\cdots+20+22 = (2+22)+(4+20)+(6+18)+(8+16)+(10+14)+12 = 24 \times 5 + 12 = 132\,.$$

   Então há pelo menos duas parcelas ímpares.

   Retirando os dois maiores números da soma anterior, obtém-se $2+4+\cdots+18 = 132-20-22 = 90$, faltando 10 para a soma ser 100. Esta soma pode ser obtida, por exemplo, acrescentando os dois números ímpares 1 e 9.