XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (29 de setembro de 2018)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Os metrôs de algumas cidades do mundo, como Berlim na Alemanha, não possuem catracas. Em princípio, qualquer um pode entrar em um trem quando quiser, pagando ou não.
O controle de pagamento é feito por amostragem por meio de um método chamado *prova de pagamento*: quando solicitado por um funcionário do metrô - os quais operam "disfarçados" (sem uniforme) dentro dos vagões - o usuário deve mostrar um bilhete válido para a viagem. Caso o usuário não possua o bilhete, ele tem de pagar uma multa.
Neste problema iremos estimar o percentual de usuários do metrô de Berlim que viajam sem pagar.

a) Ocorrem, em média, 1,515 milhão de viagens por dia no metrô de Berlim. Se o metrô de Berlim fica aberto todos os 365 dias do ano, quantas viagens ocorrem em um ano?

b) O preço médio de um bilhete unitário é 3 euros e a multa por viajar sem bilhete válido é de 60 euros. Vamos supor que metade do valor da multa é para cobrir as passagens de todos que viajam sem pagar e a outra metade é uma sobretaxa para tornar a multa alta o suficiente para que a pessoa nunca mais faça isso (equivale a aproximadamente 300 reais, viagem cara, né?). Sabe-se ainda que sejam pegos anualmente por volta de 400 mil usuários sem bilhete. Estime o percentual de viagens feitas sem pagamento em um ano.

PROBLEMA 2

Nesse problema vamos estudar o *jogo dos primos*: dado um número inicial, cada jogador passa para o outro jogador o número que recebeu subtraído de um número primo. Todos os números envolvidos devem ser positivos (lembre-se: zero não é positivo!). Chamaremos a pessoa que deve fazer a primeira subtração de primeiro jogador e o seu adversário de segundo jogador. O jogador que na sua vez não puder fazer uma jogada nessas condições perde.

Por exemplo, suponha que o número inicial seja 29. O jogo dos primos pode decorrer da seguinte maneira:

- O primeiro jogador subtrai 13 e deixa o número 16 para o segundo jogador.
- O segundo jogador subtrai 3 e obtém 13.
- O primeiro jogador subtrai 11 e obtém 2.
- É a vez do segundo jogador, mas ele não pode fazer sua jogada, pois é impossível subtrair um primo de 2 para obter um inteiro positivo (lembre-se que 1 não é primo). Nesse exemplo, o primeiro jogador foi o vencedor.

a) Suponha que o número inicial seja 20. Determine todos os números que o primeiro jogador pode deixar para o segundo na primeira jogada.

A principal pergunta nesse tipo de problema é: qual dos dois jogadores possui estratégia vencedora? Ou seja, qual dos jogadores pode escolher suas jogadas de forma que assegure sua vitória, não importando como o outro jogador jogue? Isso depende do número inicial. Por exemplo, se o inteiro positivo inicial for 1 ou 2 então o primeiro jogador já perde sem poder fazer sua primeira jogada, mas se o número inicial for 3, 4 ou 5 então o primeiro jogador pode assegurar sua vitória subtraindo 2, 3 ou 3, respectivamente. Veja que se começar com 5 o primeiro jogador poderia subtrair 2 e deixar o 3 para o segundo jogador, mas essa jogada não vale a pena.

Para estudar qual dos dois jogadores possui estratégia vencedora em cada situação, usaremos a ideia de *posições perdedoras e vencedoras*. Chamaremos o estado atual de um jogo de *posição do jogo*. No caso do jogo dos primos, a posição do jogo é o inteiro positivo que cada jogador acabou de receber. Uma posição é dita **perdedora** se o jogo acaba nessa posição ou se **qualquer forma** de jogar leva a uma posição vencedora. Uma posição é dita **vencedora** se **existe pelo menos uma forma** de jogar a partir dessa posição que deixa o adversário numa posição perdedora. Pode-se mostrar que quem recebe um número na posição vencedora tem estratégia vencedora, e que quem recebe um número na posição perdedora perde o jogo se o oponente usar a estratégia vencedora.
Na tabela a seguir temos na primeira linha as posições. Na segunda linha indicamos se a posição é perdedora indicada por P ou vencedora indicada por V. Na terceira linha indicamos para cada posição vencedora um primo que pode ser subtraído do número para levar a uma posição perdedora.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V ou P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	P	P
Primo			2	3	3	5	5	7	7		

b) Explique por que as posições 10 e 11 são perdedoras.

c) Sabendo que as únicas posições perdedoras menores que 26 são 1, 2, 10 e 11, prove que a posição 26 é perdedora.

d) Determine a próxima posição perdedora após o 26.

e) Prove que 100 é uma posição vencedora.

PROBLEMA 3

Muitos problemas da chamada *Teoria dos Números*, ramo da Matemática que estuda os números inteiros, surpreendem por serem muito simples de enunciar e, ao mesmo tempo, terem soluções extremamente difíceis. De fato, alguns deles estão abertos até hoje, isto é, ainda não se encontrou uma maneira de resolvê-los. Nesta questão, iremos estudar um problema com essas características: *quais inteiros podem ser escritos como soma de três cubos de inteiros?*

De imediato podemos obter $0 = 0^3 + 0^3 + 0^3; 1 = 1^3 + 0^3 + 0^3;\ 2 = 1^3 + 1^3 + 0^3; 3 = 1^3 + 1^3 + 1^3$. Muito fácil até agora. Então, depois de tentar bastante, percebemos que parece ser bem difícil obter expressões para 4 e para 5, se é que elas existem! Chegamos em $6 = 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3$ e tudo vai tranquilamente até chegarmos em $12 = (-11)^3 + 10^3 + 7^3$. Esse precisa de muita paciência e organização para obter! Achou difícil? Que tal

$$30 = 2220422932^3 + (-2218888517)^3 + (-283059965)^3$$

É claro que aqui contamos com o com auxílio de computadores!

De fato, o que se sabe atualmente sobre o problema é que não é possível representar números que deixam resto 4 ou 5 na divisão por 9 como soma de três cubos, ou seja: $4, 5, 13, 14, 22, 23, 31, 32$, por exemplo, não podem ser representados dessa maneira. E se acredita que todos os outros números possuam infinitas representações, mas, em especial, não se sabe até hoje se o número 33 é a soma de três cubos.

a) São conhecidas várias maneiras de representar alguns números como soma de três cubos, por exemplo, $29 = 3^3 + 1^3 + 1^3 = 4^3 + (-3)^3 + (-2)^3 = (-20)^3 + 13^3 + 18^3$. Escreva 34 de duas maneiras distintas como soma de três cubos.

b) Observe:

$$(3k)^3 = 27k^3 = 9(3k^3)$$
$$(3k+1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1$$

Isto é: ao elevarmos ao cubo um múltiplo de 3 (deixa resto 0 na divisão por 3) obtemos um múltiplo de 9 (deixa resto 0 na divisão por 9); ao elevarmos ao cubo um número que deixa resto 1 na divisão por 3 obtemos um número que deixa resto 1 na divisão por 9.

Qual é o resto na divisão por 9 do cubo de um número que deixa resto 2 na divisão por 3?

Dica: Você pode desejar utilizar nesse item a identidade: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

c) Utilizando o item b, mostre que todo número que deixa resto 4 na divisão por 9 não pode ser escrito como soma de três cubos de inteiros.

Vamos concluir esse problema demonstrando que o número 2 pode ser escrito de infinitas maneiras como soma de três cubos. Inicialmente, considere a soma de três cubos:

$$(a+1)^3 + (-a+1)^3 + (-b)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^3 + 3a^2 - 3a + 1 - b^3 =$$
$$6a^2 - b^3 + 2$$

Basta, então, encontrarmos expressões para a e b de modo que

$$6a^2 - b^3 + 2 = 2 \Leftrightarrow 6a^2 = b^3 (*)$$

e teremos infinitas maneiras de representarmos 2 como soma de três cubos.

d) A partir da igualdade em $(*)$, obtenha expressões algébricas para a e b, provando que 2 pode ser escrito de infinitas maneiras como soma de três cubos.

PROBLEMA 4

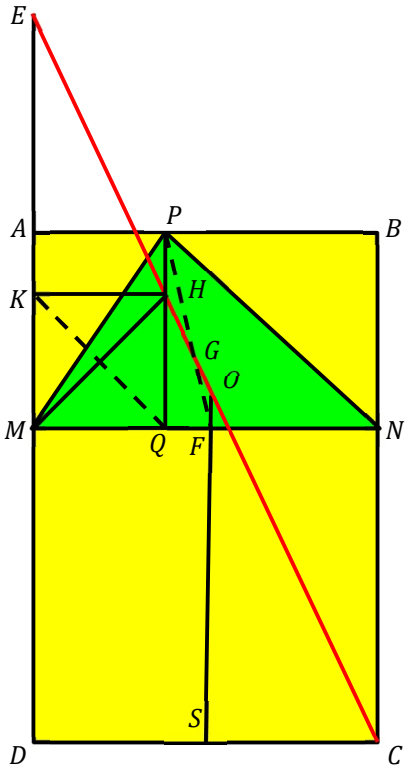
A razão áurea, representada por φ, é uma constante real muito utilizada em obras de arte. Muitos artistas acreditam que essa razão torna as formas mais belas. Por exemplo, na obra Mona Lisa de Da Vinci se um retângulo for desenhado em torno do rosto da jovem, a altura desse retângulo dividida pela largura seria aproximadamente φ. Retângulos em que a razão entre os lados é φ são conhecidos como *retângulos dourados*.

Outra estrutura considerada muito bela pelos amantes da geometria é a Reta de Euler. Em todo triângulo, o ortocentro (encontro das alturas), o baricentro (encontro das medianas) e o circuncentro (encontro das mediatrizes) estão sobre uma mesma reta chamada *Reta de Euler* do triângulo.

Nesse problema uniremos essas duas estruturas para construir um novo resultado também muito belo.

Vamos definir φ como o número real positivo tal que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Seja $ABCD$ um retângulo dourado com $\frac{AD}{AB} = \varphi$. Considere os quadrados $CDMN$, $BNQP$ e $MQHK$ dentro dos três retângulos $ABCD$, $ABNM$ e $MQPA$, respectivamente. Tome ainda o ponto E de modo que A seja o ponto médio do segmento ME. Provaremos que EC é a Reta de Euler do triângulo MNP.



Retângulos dourados têm uma propriedade bacana: se cortarmos um quadrado de lado igual à sua menor dimensão, obtemos outro retângulo dourado. Por exemplo, veja que se cortarmos o quadrado $CDMN$ do retângulo dourado $ABCD$, obtemos o retângulo dourado $BNMA$, pois

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AB}{AD - AB} = \frac{1}{\frac{AD}{AB} - 1} = \frac{1}{\varphi - 1},$$

e

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi(\varphi - 1) = 1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{\varphi - 1},$$

de modo que

$$\frac{AB}{AM} = \varphi.$$

Observe que, pelo mesmo raciocínio, os retângulos $MQPA$ e $AKHP$ também são retângulos dourados.

a) Prove que KQ é paralelo a PN. Observe que MH e KQ são perpendiculares, pois são diagonais de um quadrado. A partir desses resultados, explique por que H é o ortocentro do triângulo MNP.
Dica: basta provar que duas alturas desse triângulo passam no ponto H.

Usando os retângulos dourados podemos calcular razões

$$\frac{AD}{AM} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{AM} = \varphi \cdot \varphi = \varphi^2 \; e \; \frac{AK}{AM} = \frac{AK}{AP} \cdot \frac{AP}{AM} = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

b) Prove que $\frac{KH}{DC} = \frac{1}{\varphi^2}$.

Veja que

$$\frac{EK}{ED} = \frac{EA + AK}{EA + AD} = \frac{AM + AK}{AM + AD} = \frac{1 + \frac{AK}{AM}}{1 + \frac{AD}{AM}} = \frac{1 + \frac{1}{\varphi^2}}{1 + \varphi^2} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

c) Prove que $m(H\hat{E}K) = m(C\hat{E}D)$ e conclua que o ponto H está sobre a reta EC.

Sejam O e S os pontos médios dos lados EC e CD do triângulo CDE, respectivamente, e F a interseção de MN e OS. Para provar que O é o circuncentro do triângulo MNP basta mostrar que OF é perpendicular a MN e que $2 \cdot OF = PH$. A partir disso, é possível concluir que a reta EC é a Reta de Euler do triângulo MNP.

d) Prove que OF é perpendicular a MN e que $2 \cdot OF = PH$.

PROBLEMA 5

Atarefaldo tem muitas tarefas para fazer, e precisa se organizar para saber em que ordem ele deve fazer suas tarefas. Ele só se preocupa com a tarefa que se atrasar mais, e quer minimizar o atraso dessa tarefa. Chamemos esse atraso de *atraso máximo*.

Cada tarefa tem uma *duração*, que é o tempo que ela demora para ser feita, e um *prazo*, que é quando ela deve ser entregue. O atraso é igual ao tempo decorrido entre o prazo da tarefa e o momento em que a tarefa é concluída, se tal conclusão ocorre após o prazo; caso contrário, o atraso é zero. Não existem atrasos negativos.

Por exemplo, se Atarefaldo tem três tarefas A, B e C, com prazos marcados para daqui a 5, 7 e 11 dias, respectivamente, e durações 5, 6 e 2 dias, respectivamente, e faz as tarefas na ordem BAC, o seguinte ocorre:

- Atarefaldo termina a tarefa B após 6 dias, a entregando antes do seu prazo de 7 dias, ou seja, com atraso 0.
- Ele termina a tarefa A após $6 + 5 = 11$ dias, a entregando com um atraso de $11 - 5 = 6$ dias.
- Ele termina a tarefa C após $6 + 5 + 2 = 13$ dias, a entregando com um atraso de $13 - 11 = 2$ dias.

O atraso máximo é, então, o maior valor entre 0, 6 e 2, ou seja, 6.

Após essa experiência, Atarefaldo decidiu, então, entregar suas tarefas em ordem crescente de prazo. No exemplo anterior, ele entregaria suas tarefas na ordem ABC.

a) Calcule o atraso máximo que Atarefaldo obteria se fizesse as tarefas descritas anteriormente na ordem ABC.

Vamos agora demonstrar que esse método realmente minimiza o atraso máximo. Para isso, vamos supor que isso não seja o caso, e chegaremos a um absurdo.

b) Prove que se as tarefas de Atarefaldo não estão em ordem crescente de prazo, então existem duas tarefas consecutivas, X e Y, tais que X vem antes de Y e o prazo p de X vem depois do prazo q de Y.

c) Sejam d e f as durações de X e Y, respectivamente. Seja então O_1 essa ordem com X antes de Y e O_2 a ordem de tarefas obtidas a partir da anterior somente trocando a ordem das tarefas X e Y. Compare os atrasos de todas as tarefas das ordens O_1 e O_2, verifique que o atraso máximo não aumenta e conclua a demonstração.