XXIII Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2020

21 de novembro de 2020

1. (4 pontos) Para todo o inteiro positivo n, definimos a_n como a média de todos os divisores positivos de n. Determine se as seguintes séries convergem ou divergem:

   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, a_n}$

2. (4 pontos) Sejam a, b números complexos tais que $|b| > \text{máx}\{1, |a|\}$. Prove que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{b^{m+1} - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{b^{m+1} - a}.$$

3. (5 pontos) Dois elementos de $\mathbb{Z}^2$ são chamados de *vizinhos* se estiverem à distância 1. Os elementos de $\mathbb{Z}^2$ são pintados de azul (e uma vez pintados permanecem pintados) por etapas da seguinte forma:

   - Na etapa 0, é pintado $(0, 0)$.
   - Na etapa $n > 0$ são pintados todos aqueles pontos que não foram pintados, e têm exactamente um vizinho pintado após a etapa $n - 1$.

   Determine todos os elementos de $\mathbb{Z}^2$ que não serão pintados após um número finito N de etapas, no retângulo $[-N, N] \times [-N, N]$.

4. (5 pontos) Determine se existem números complexos $z_1, z_2, ..., z_{2020}$, todos com parte imaginária (estritamente) positiva, tais que

$$(z_1 + z_2 + ... + z_{2020})^2 = z_1^2 + z_2^2 + ... + z_{2020}^2$$

5. (5 pontos) Seja x um número real. Para cada inteiro positivo n, seja A_n a matriz $n \times n$ tal que $a_{i,i} = x$, $a_{i,j} = 1$ se $|i - j| = 1$ e $a_{i,j} = 0$ se $|i - j| > 1$. Prove que se o determinante de A_n é positivo para todo o inteiro positivo n, então $x \geq 2$.

6. (6 pontos) Seja p um número primo e V um espaço vectorial n-dimensional sobre um corpo F de característica p. Determine o maior inteiro a_n, tal que para qualquer transformação linear $T : V \to V$ com $T^p = I$, se tem que

$$\dim(\{v \in V : Tv = v\} \geq a_n.$$

7. (7 pontos) Encontre todas as funções holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f^2(z) - f^2(w) = f(z+w)f(z-w),$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(*Obs.:* A notação f^2 indica o quadrado da função f, isto é, $f^2(z) = (f(z))^2$).