XXI Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2018

10 de novembro de 2018

1. (3 pontos). Demonstre que o número de soluções inteiras positivas da equação $(a+b)(a+c) = abc$ é finito.

2. (3 pontos). Seja $G$ um grafo conexo com $n$ vértices e $P$ um caminho em $G$ de comprimento $k$. Suponha que $G$ não contém um caminho de comprimento maior que $k$. Seja $Y = V(G) \setminus V(P)$ e seja $v \in Y$ um vértice adjacente a $s$ vértices de $P$ com $s \geq 1$, e suponha que o maior caminho usando só os vértices de $Y$ e começando em $v$ tem comprimento $p$. Prove que $s + p \leq k/2$.

   **Nota:** Um caminho de comprimento $k$ num grafo é uma sucessão de $k+1$ vértices distintos $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, os vértices $v_{i-1}$ e $v_i$ são adjacentes.

3. (4 pontos). Determine todos os vetores $u \in \mathbf{Z}^2$ para os quais a reta $u \cdot v = 1$ interseta um círculo $\|v\| = r$ em dois pontos com coordenadas inteiras.

4. (5 pontos). Determine todas as funções $f\colon (0,1) \to (0, +\infty)$ em $C^2(0,1)$, tais que todas as retas tangentes à curva intersetam os semi-eixos positivos e determinam segmentos de comprimento 1.

5. (6 pontos). Seja $p$ um número primo. Demonstre que existem infinitos inteiros positivos $n$ tais que o sistema de equações

$$a_2 = 4a_1, \quad a_1 + a_3 = 4a_2, \quad \ldots \quad , \quad a_{n-2} + a_n = 4a_{n-1}, \quad a_{n-1} = 4a_n,$$

   sobre $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, admite pelo menos uma solução com $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, não todos nulos.

6. (7 pontos). Considere a sucessão de Fibonacci $\{Fn\}$ definida por $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ para $n \geq 1$. Seja $p$ um polinómio trigonométrico finito da forma

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi F_{2n} x),$$

   com $a_i \in \mathbb{C}$. Demonstre que se $\int_0^1 |p(x)|^2 dx \leq 1$, então $\int_0^1 |p(x)|^4 dx < 3$.

7. (7 pontos). Seja $p(x)$ um polinómio com coeficientes reais tal que

$$\text{grau}(p) \leq 2018, \quad \text{e} \quad |p(x)| \leq \frac{1}{|x - \sqrt{3}|} \quad \text{para} \quad x \in [-2, 2].$$

   Prove que

$$|p(\sqrt{3})| \leq 2019.$$