



XVIII Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2015

07 de novembro de 2015

1. **(3 pontos)** Sejam  $a$  e  $b$  números reais tais que  $a < b$  e  $ab > 0$ . Seja  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  uma função contínua. Mostre que existe um número real  $x$  em  $[a, b]$  tal que  $xf(x) = ab$ .
2. **(4 pontos)** Demonstre que 65 é o número mínimo de retas com que se pode construir um polígono (não convexo) de 2015 lados tal que estas retas contêm todos os lados do polígono.
3. **(4 pontos)** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como  $M(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n) = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1)$ . Determine todos os números  $n \in \mathbb{N}$  para os quais existe  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear tal que  $L^2 = M$ .
4. **(5 pontos)** Seja  $(a_n)$  uma sucessão crescente de inteiros positivos.
  - a) Demonstre que se  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  é finita, então existe um conjunto infinito de inteiros positivos, digamos  $S$ , de modo que a soma de qualquer quantidade finita de elementos distintos de  $S$  não é um termo da sucessão  $(a_n)$ .
  - b) Será possível que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  diverja mas ainda assim exista um conjunto  $S$  com as propriedades da alínea anterior?
5. **(5 pontos)** Demonstre que

$$\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

6. **(7 pontos)** Encontre um inteiro positivo  $m$  tal que todo número da forma  $a^{2015} + b^{2015}$ , dividido por  $m$ , tem menos de  $\frac{m}{5}$  restos diferentes.
7. **(8 pontos)** Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_k$  números inteiros distintos com  $\sum_{i=1}^k a_i = n$  e seja  $g$  a permutação dada por:

$$g = (1, 2, \dots, a_1)(a_1 + 1, a_1 + 2, \dots, a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + 1, \dots, a_1 + a_2 + a_3) \dots (a_1 + \dots + a_{k-1} + 1, \dots, n)$$

Mostre que o centralizador de  $g$  em  $Sym_n$ , o grupo simétrico em  $n$  letras, é um grupo abeliano.

*Nota: O centralizador de  $g$  em  $Sym_n$  é o subgrupo das permutações em  $Sym_n$  que comutam com  $g$  e um grupo é abeliano se  $xy = yx$  para todo  $x, y$  pertencente ao grupo.*