



XII Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária

07 de Novembro de 2009

Problema 1 (4 pontos) Uma recta passa por um vértice de um triângulo não degenerado e divide este triângulo em dois triângulos semelhantes com uma razão entre os lados igual a $\sqrt{3}$. Encontrar os ângulos do triângulo dado.

Problema 2 (5 pontos) Sejam x_1, \dots, x_n vectores não nulos de um espaço vectorial V e $\varphi : V \rightarrow V$ uma aplicação linear deste espaço tais que $\varphi x_1 = x_1, \varphi x_k = x_k - x_{k-1}$ para $k = 2, 3, \dots, n$. Demonstrar que o conjunto de vectores x_1, \dots, x_n é linearmente independente.

Problema 3 (5 pontos) Sejam $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+$ e f definida como : $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid c - dx - ey > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x, y) = (ax)(by)(c - dx - ey)$. Encontrar o seu valor máximo.

Problema 4 (6 pontos) Dados inteiros positivos m e n , diz-se que uma função $f : [0, m] \rightarrow \mathbb{R}$ é (m, n) -*escorregadia* se possui as seguintes propriedades:

- i) f é contínua;
- ii) $f(0) = 0, f(m) = n$;
- iii) Se $t_1, t_2 \in [0, m]$ com $t_1 < t_2$ são tais que $t_2 - t_1 \in \mathbb{Z}$ e $f(t_2) - f(t_1) \in \mathbb{Z}$, então $t_2 - t_1 \in \{0, m\}$.

Determinar os valores de m, n para os quais existe uma função f que seja (m, n) -escorregadia.

Problema 5 (7 pontos) Sejam \mathbb{N} e \mathbb{N}^* os conjuntos dos naturais e dos inteiros positivos respectivamente. Definimos uma relação \acute{e} em \mathbb{N} por $a \acute{e} b$ se, e só se, o a -ésimo bit na representação binária de b é 1.

Definimos uma relação \tilde{e} em \mathbb{N}^* por $a \tilde{e} b$ se, e só se, b é múltiplo do a -ésimo número primo p_a .

- i) (2 pontos) Demonstrar que não existe uma bijecção $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ tal que $a \acute{e} b \Leftrightarrow f(a) \tilde{e} f(b)$.
- ii) (5 pontos) Demonstrar que existe uma bijecção $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ tal que $(a \acute{e} b \text{ o } b \acute{e} a) \Leftrightarrow (f(a) \tilde{e} f(b) \text{ o } f(b) \tilde{e} f(a))$.

Problema 6 (7 pontos) Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_e \in \mathbb{C}$ tais que os polinômios

$$f_1(x) = \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i) \quad \text{e} \quad f_2(x) = \prod_{i=1}^e (x - \beta_i)$$

têm coeficientes inteiros. Suponhamos que existem polinômios $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f_1g_1 + f_2g_2 = 1$. Demonstrar que

$$\left| \prod_{i=1}^d \prod_{j=1}^e (\alpha_i - \beta_j) \right| = 1.$$

Problema 7 (8 pontos) Seja G um grupo tal que todo subgrupo de G é subnormal. Suponhamos que existe N subgrupo normal de G , tal que $Z(N)$ é diferente de e e G/N é cíclico. Demonstrar que $Z(G)$ é diferente de e . ($Z(G)$ denota o centro de G).

Nota: Um subgrupo H de G é subnormal se existem subgrupos $H_1, H_2, \dots, H_m = G$ de G com $H \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \triangleleft \dots \triangleleft H_m = G$ (\triangleleft denota subgrupo normal).