XXXIX OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2020 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção B. (*Cruzam-se uma vez a cada* $\frac{12}{11}$ *horas.*)
   (b) Opção C. (*Há* 16 *pássaros e* 5 *ramos.*)
   (c) Opção B. (*O triângulo tem o dobro da área de um quadrado.*)
   (d) Opção B. (*As amplitudes são* $46°$, $57°$ *e* $77°$.)

2. Sendo $\dot{A}D$ a bissetriz de $\angle BAC$, tem-se que $B\widehat{A}D = D\widehat{A}C = \beta$. Como $\overline{CA} = \overline{CB}$, tem-se que $C\widehat{B}A = B\widehat{A}C = 2\beta$, portanto, $A\widehat{C}B = 180° - 4\beta$.

   Por outro lado, também o triângulo $\overline{AC} = \overline{AD}$, logo $A\widehat{D}C = A\widehat{C}D = A\widehat{C}B$ e, por isso, $\beta = 180° - 2A\widehat{C}B$.

   Portanto, $A\widehat{C}B = 180° - 4\beta = 180° - 4(180° - 2A\widehat{C}B)$, ou seja, $A\widehat{C}B = \frac{3}{7} \times 180°$.

3. **Solução 1:** Um número repetitivo que usa apenas um algarismo é da forma $AAAAAA$, onde há 9 escolhas possíveis para A. Portanto, neste caso, há 9 números repetitivos.

   Um número repetitivo que usa dois algarismos é da forma $ABABAB$, $AABAAB$, $ABBABB$ ou $ABAABA$, onde há 9 escolhas possíveis para A e 9 escolhas possíveis para B. Portanto, neste caso, há $4 \times 9 \times 9 = 324$ números repetitivos.

   Um número repetitivo que usa três algarismos é da forma $ABCABC$, onde há 9 escolhas possíveis para A, 9 escolhas possíveis para B e 8 escolhas possíveis para C. Portanto, neste caso, há $9 \times 9 \times 8 = 648$ números repetitivos.

   Portanto, ao todo há $9 + 324 + 648 = 981$ números repetitivos.

   Solução 2: Um número repetitivo que repete um conjunto de três algarismos é da forma $ABCABC$ onde A, B e C podem ser iguais e o número ABC está entre 100 e 999. Portanto, neste caso há 900 números repetitivos.

   Um número repetitivo que repete um conjunto de dois algarismos, que não esteja já contabilizado, é da forma $ABABAB$ onde A e B são diferentes. Logo há 9 possibilidades para A e 9 possibilidades para B. Portanto, neste caso há $9 \times 9 = 81$ números repetitivos.

   Os números repetitivos que repetem um conjunto de apenas um algarismo já foram contabilizados no primeiro caso.

   Portanto, ao todo há $900 + 81 = 981$ números repetitivos.

4. A primeira casa tem um único vizinho, por isso a segunda casa tem que ser pintada da mesma cor que a primeira. Há três escolhas para a cor dessas duas casas. Como as duas primeiras são da mesma cor, a terceira tem que ser pintada de uma cor diferente (portanto há duas escolhas) para que a segunda casa não tenha dois vizinhos com a casa da mesma cor. Agora a quarta casa tem que ser pintada da mesma cor que a terceira. Da mesma maneira se vê que as quinta e sexta casas, sétima e oitava, nona e décima têm que ser da mesma cor, respetivamente. Para cada um destes pares temos duas escolhas para a sua cor. Assim, há $3 \times 2^4 = 48$ maneiras de pintar as casas.